

☑ **논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)**

한국대학교육협의회 논술연구회

연구위원	서정인	서울고등학교
	강영기	남주고등학교
	김평원	마포고등학교
	김흥규	광신고등학교
	이명수	대광고등학교
	이효근	하나고등학교
	최병기	영등포여자고
	최진규	서령고등학교
	황충일	서도고등학교
	정형식	하나고등학교
	김호경	송문고등학교
	최두호	오산고등학교
	송창현	선덕고등학교

자문위원	윤희원	서울대학교
	조완영	충북대학교

연구협력관	오성근	입학전형지원실장
	구안규	입학관리팀장
	정청교	입학관리팀 전문원

논술지도의 원리와 실제Ⅲ을 펴내면서

복(福)을 가져오고 장수(長壽)를 누리게 해준다는 복수초가 노루귀와 함께 꽃샘추위에도 불구하고 수줍은 꽃망울을 터뜨렸습니다. 혹독했던 지난 겨울을 이겨내어 남보다 빨리 꽃을 피워내려는 복수초와 가녀린 노루귀의 집념어린 노력에 감탄하지 않을 수 없습니다.

한국대학교육협의회 논술연구회에서도 공교육이 선도하는 논술교육의 꽃을 활짝 피우기 위해 지속적인 노력을 계속하고 있습니다. ‘논술지도의 실제와 원리’는 그동안 계속해왔던 노력의 결실입니다.

진정한 통합교과논술 대비는 다양한 교과를 공부하며 전인교육을 실천하고 있는 학교에서 가능하다고 생각합니다. 그러나 학교현장에서는 흔히 적절한 자료나 교재가 없어서 효율적인 논술지도를 할 수 없다는 어려움을 호소하곤 합니다. 이에 대한 해소책의 일환으로 본 논술연구회에서는 이 책을 발간하게 되었습니다.

이 책에는 통합교과논술에 입문하는 학생들을 위한 것으로 제시문과 논제를 철저하게 분석하여 인문계열 및 자연계열 논술에서 요구하는 문제를 해결할 수 있는 지름길을 제시하였습니다. 아울러 글쓰기에 대한 감각을 키우고 실전에 임할 수 있는 자신감을 배양할 수 있도록 하였습니다.

통합교과논술의 특징은 개개인이 가지고 있는 다양한 사고능력과 판단력을 토대로 교과와 관련된 문제를 해결하는 과정을 반영한 글쓰기입니다. 그러므로 이 책에서 제시한 지름길이 고속도로 역할은 할 수 있어도 목적지에 도달하는 유일한 길은 아니라는 점에 유의하여야 합니다. 끊임없이 읽고 토론하고 글쓰기를 통하여 자신의 생각을 남에게 정확하게 전달하여 설득할 수 있도록 노력하여 꿈을 이루길 바랍니다.

차 례

제 1 부 - 수리논술을 위한 이해	1
제 1 강 : 수리논술의 이해	3
1. 수리논술이란?	3
2. 논제에 대한 이해와 서술	4
제 2 강 : 제시문과 논제의 이해	11
1. 논제의 분석	11
2. 제시문 분석	12
제 3 강 : 수리논술의 답안작성	18
1. 답안의 개요잡기	18
2. 답안 쓰기 및 검토	18
제 2 부 - 수리논술을 위한 논증	23
제 4 강 : 직접증명	25
제 5 강 : 귀류법 (歸謬法)	28
제 6 강 : 귀납적 추론과 수학적 귀납법	31
1. 귀납적 추론	31
2. 수학적 귀납법	32

제 3 부 - 수리논술을 위한 수학적 사고	37
제 7 강 : 확 률	39
1. 통계적 확률과 수학적 확률	39
2. 시행, 표본공간, 사건	40
3. 조건부확률의 정의	40
4. 기하학적 확률	40
제 8 강 : 적분의 활용	43
제 9 강 : 항등원과 역원, 피보나치수열	47
1. 항등원과 역원	47
2. 행렬	48
제 10 강 : 나 선	51
[부 록]	55
- 답안작성을 위한 참고답안	57

II
2
F
Z



제 1 부 – 수리논술을 위한 이해

제 1 강 : 수리논술의 이해

제 2 강 : 제시문과 논제의 이해

제 3 강 : 수리논술의 답안작성

제 1 부 - 수리논술을 위한 이해



제1강 수리논술의 이해

1. 수리논술이란?

1) 수리논술의 정의

자연계 수리논술은 ‘수학적 원리나 개념에 바탕을 둔 어떤 것에 대한 논리적 서술’이다. 따라서 자연계 수리논술의 핵심은 수학적 사고에 있으며 논술교재의 기본은 교과서이다. 이를 구조적으로 풀어보면 다음과 같다.

- ① 수학적 원리 또는 개념에 바탕을 두다 : 수학적인 원리나 개념은 수학적인 가정을 이용하여 보통 수식이나 그림을 이용하여 표현된다. 따라서 적절한 수식이나 그림을 활용하는 것이 바람직하다.
- ② 어떤 것 : 서술해야 하거나 풀어야 할 주제에 해당한다. 제시문이나 논제의 분석을 통해 그 방향을 정할 수도 있다.
- ③ 논리적 : 일반적으로 근거(참인 명제)와 주장(의견)으로 구성되는 연결과정이 정확함을 의미한다.
- ④ 서술 : 방향을 가지고 글을 쓰는 것을 말한다.

2) 논술용어

- ① 논제 : 논술 문제에서 무엇을, 어떻게 써야 하는지를 출제자가 요구하는 사항. 수리논술의 경우 간단히 문제 또는 문항으로 주어지기도 한다.
- ② 제시문 : 논제의 이해를 돕기 위한 내용 또는 문제를 풀기위한 자료가 제시된 글. 수리논술의 경우 제시문 없이 논제가 주어지기도 한다.

3) 수리논술의 지시어

논제의 명령조 서술어로 보통 ‘~ 을 ~ 하시오’ 형태로 주어진다. 수리논술에서 자주 등장하는 지시어는 다음과 같다.

- ① 설명하시오 : 알기 쉽게 밝힘
- ② 의 값을 구하시오 : 조건에 맞는 값을 정함.
- ③ 증명하시오 : 수학적으로 알려진 사실이나 개념을 이용하여 논리적으로 입증함.
- ④ 논(술)하시오 : 논리적으로 서술함.
- ⑤ 나타내시오 : (요구하는 형태로) 표현함
- ⑥ 추정하시오 : 어떤 내용으로부터 추측하여 정함.
- ⑦ 유도하시오 : 가정을 통해 논리적 과정을 거쳐 어떤 결과를 얻음.
- ⑧ ~의 결과와 비교하시오 : 두 가지 이상의 결과를 견주어 설명함.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

2. 논제에 대한 이해와 서술

논제는 조건과 요구사항으로 나뉜다. 주어진 조건과 요구사항이 무엇인지 표시하고 지시어의 뜻에 맞게 풀어나가는 것이 필요하다. 이에 따라 적절한 배경지식을 바탕으로 답안을 구성할 수 있다.

[예 1] $x < 0$ 일 때, $\frac{x^2+2}{x}$ 의 최댓값을 구하시오.

이 논제에서 주어진 조건과 요구사항을 분리하여 정리해 보자.

주어진 조건	$x < 0$ 즉, x 는 음수이다.
요구사항	$\frac{x^2+2}{x}$ 의 최댓값 구하기

* 예상되는 서술답안의 예이다. 상황에 따라 다른 관점을 제안할 수 있으나 글로써 서술답안을 판단한다는 관점에서 필요한 경우 보완 또는 수정을 해 보자.

[답안 1] $\frac{x^2+2}{x} = x + \frac{2}{x}$ 이므로 $x = \frac{2}{x}$ 일 때 최대, 최소가 결정된다.

$x < 0$ 이므로 $x = -\sqrt{2}$ 일 때 최대이고 최댓값은 $-2\sqrt{2}$ 이다.

[답안 2] $x < 0$ 이므로 $-x > 0$ 이고 $-\frac{2}{x} > 0$ 이다. $\frac{x^2+2}{x} = x + \frac{2}{x}$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\frac{1}{2} \left\{ (-x) + \left(-\frac{2}{x}\right) \right\} \geq \sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)} = \sqrt{2}$$

이다. 양변에 -1 을 곱하면 $\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x}\right) \leq -\sqrt{2}$ 이므로

$x + \frac{2}{x} \leq -2\sqrt{2}$ 이다. 따라서 $\frac{x^2+2}{x}$ 의 최댓값은 $-2\sqrt{2}$ 이다.

[답안 3] $\frac{x^2+2}{x} = t$ 라 놓으면 $t < 0$ 이다.

$x^2 - tx + 2 = 0$ 에서 x 는 실수이므로 이차방정식이 실근 가질 조건을 고려하여

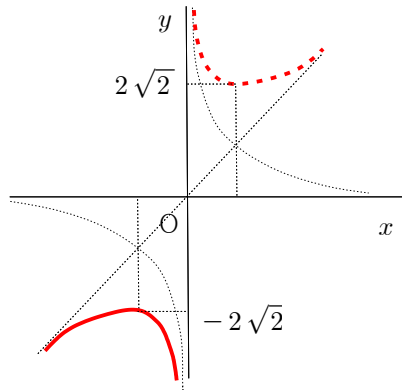
$$(-t)^2 - 8 \geq 0$$

을 풀면 $t \leq -2\sqrt{2}$ 또는 $t \geq 2\sqrt{2}$ 이다. 그런데 $t < 0$ 이므로 $t \leq -2\sqrt{2}$ 이다.

따라서 $\frac{x^2+2}{x} = t$ 의 최댓값은 $-2\sqrt{2}$ 이다.



[답안 4] $\frac{x^2+2}{x} = y$ 로 두고 $y = x + \frac{2}{x}$ 의 그래프를 활용하여 y 의 값의 범위를 구한다. 직선 $y = x$ 와 $y = \frac{2}{x}$ 의 교점의 x 좌표를 구하면 $x = \pm \sqrt{2}$ 이다. $x < 0$ 이므로 그래프에서 $y \leq -2\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다. 따라서 $\frac{x^2+2}{x} = y$ 의 최댓값은 $-2\sqrt{2}$ 이다.



[예 2] [2006학년도 고려대 모의논술문제]

한 사람이 계단을 매 걸음마다 한 계단 또는 두 계단씩 올라간다고 하자. n 개의 계단을 올라가는 모든 가능한 방법의 수를 a_n 이라 할 때,

(1) 서로 다른 n 에 관한 a_n 들 사이의 관계를 설명하시오.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이 존재한다. 그 값을 계산하시오.

이 문제는 두 개의 논제 (1), (2)로 구성되어 있다. 논제 (1)의 경우 a_n 에 대한 이해가 먼저 필요하다. $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ 일 때 a_n 의 값을 구체적으로 구한 후 서로 다른 n 에 관한 a_n 들 사이의 관계를 설명할 수 있다. 논제 (2)의 경우 논제 (1)에서 구한 관계식을 분수식으로 변형한 후 극한을 적용할 수 있다.

주어진 조건		매 걸음마다 한 계단 또는 두 계단씩 올라간다.
		a_n 은 n 개의 계단을 올라가는 모든 가능한 방법의 수이다.
논제(1)	요 구 사 항	서로 다른 n 에 관한 a_n 들 사이의 관계 구하기
		a_n 들 사이의 관계를 설명하기
논제(2)	요 구 사 항	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 이 존재할 때, 이 값을 계산하기

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

논제 (1)의 경우 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 들 사이의 등식을 얻을 수 있다. 즉,

$$a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$$

논제 (2)의 경우 $a_{n+1} > 0$ 임을 이용하여 (1)에서 얻은 관계식의 양변을 a_{n+1} 로 나누면 등식

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} + 1 = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

을 얻을 수 있다. 극한 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 의 값이 유일함을 이용하여 값을 구할 수 있다.

[배경지식 1] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x$ 라 놓으면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = x$ 이다.

[배경지식 2] 피보나치수열

이웃한 두 수가 주어지면 이 두 수를 더하여 다음 수가 되는 구조로 배열된 수의 배열을 피보나치수열이라 하고, 피보나치수열에 나오는 수를 피보나치 수라 부른다. 이것은 이탈리아의 수학자 레오나르도 피사노(1170~1240)의 이름을 따서 붙여진 명칭이다.

예를 들어, 두 수 1과 2가 주어지면 두 수 1과 2를 더하여 3을 구하고, 다시 2와 3을 더하여 5을 구하고, 3과 5를 더하여 8을 구한다. 이와 같이 앞의 두 수를 더하여 다음 수를 결정한다는 규칙에 따라 얻은 것을 나열하면 다음과 같이 된다.

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, . . .

피보나치수열의 수들은 서로 어떤 특성이 있을까? 이웃한 두 수로 분수를 만들어 그 비율을 생각할 수 있다. 이웃한 두 수에 대하여 큰 수를 작은 수로 나누어 비율을 구하면 두 수가 커질수록 그 값은 황금비(약 1.618)에 가까워진다.

분 수	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\frac{55}{34}$	$\frac{89}{55}$
소 수	2.000	1.500	1.667	1.600	1.625	1.615	1.619	1.618	1.618

또한 이웃한 두 수에 대하여 작은 수를 큰 수로 나누어 비율을 구하면 두 수가 커질수록 그 값은 황금비(약 0.618)에 가까워진다.



분 수	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{13}{21}$	$\frac{21}{34}$	$\frac{34}{55}$	$\frac{55}{89}$
소 수	0.500	1.500	0.600	0.625	0.615	0.619	1.619	0.618	0.618

수학에서는 앞에 수 1을 더 첨가하여 다음과 같은 피보나치수열을 생각하는 경우가 많다.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, . . .

이 수열을 $\{a_n\}$ 로 나타내면

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

임을 알 수 있다. 또한 일반항을 구하면

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

이다. 이 수열은 수학사에서 피보나치수열로 불린다. 특히 피보나치수열에서 두 이웃의 비로 이루어진 수열의 극한은 흥미롭게도 고대 그리스인들 사이에서 가장 조화로운 비율로 믿어져왔던 황금비의 값 (1.618...)과 일치한다. 황금비의 값은 지금까지도 미술, 음악, 역사, 건축, 생물학, 심리학 등의 다양한 영역에서 활용되고 있음을 찾아 볼 수 있다. 그리고, 이 값은 피보나치수열의 일반항 및 수열의 극한 등을 이용하여 다음과 같은 결과를 유도할 수 있다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

연습 A : 2010학년도 동국대 논술문항 일부변형

※ 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

[가] 어떤 규칙에 의해 순서가 정해진 채 나열된 수들은 수열이다. 이러한 수들의 관계가 수식으로 정의될 수 있다면 해당 수열에 대한 여러 가지 연산을 손쉽게 할 수 있다. 예를 들면, n 을 자연수라 할 때 수열의 일반항 a_n 이 $a_n = 2n - 1$ 로 정의되면, 수열은 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, \dots$ 과 같은 홀수들을 나타내는 것임을 쉽게 알 수 있다. 수열에 관한 이러한 식은 수들 간의 관계를 탐구하고, 이를 간결하게 정리하는데 유용하다. 가령 57번째 수를 알고자 한다면 일반항으로부터 $a_{57} = 2 \times 57 - 1 = 113$ 임을 신속히 확인할 수 있다. 또한, a_1 부터 a_{100} 까지의 합, 즉

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} = \sum_{n=1}^{100} a_n \text{을 구하기 위해 } a_1, \dots, a_{100} \text{의 값을 일일이 구해서 합할 필요 없이 1}$$

부터 k 까지 자연수의 합이 $\sum_{n=1}^k n = \frac{k(k+1)}{2}$ 이라는 사실을 이용하여

$$\sum_{n=1}^{100} a_n = \sum_{n=1}^{100} (2n - 1) = 2 \sum_{n=1}^{100} n - 100 = 100 \times 101 - 100 = 10000$$

임을 쉽게 계산해 낼 수 있다.

[나] 수열들 중에는 재미있는 특성을 지닌 것도 있는데, 피보나치(Fibonacci) 수열은 그 생성규칙의 특이성과 성질로 인해 문화, 예술 등에 많은 영향을 주었다. 피보나치수열은 다음과 같다.

$$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 3, b_5 = 5, \\ b_6 = 8, b_7 = 13, b_8 = 21, b_9 = 34, b_{10} = 55, \dots$$

이 수열을 수열의 초기 값과 이웃하는 항들 사이의 관계식으로 구성되는 점화식으로 표현하면, 피보나치수열이 어떻게 생성된 것인지를 이해하기가 매우 쉽다.

$$b_1 = 1, b_2 = 1, b_n = b_{n-2} + b_{n-1} \quad (n = 3, 4, 5, 6, \dots)$$

즉, b_1 과 b_2 는 1로 주어지고, b_3 부터는 앞의 두 수의 합으로 정의된다는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 하지만 위의 점화식으로는 b_n 이 얼마인지 바로 확인하는 것은 매우 어렵다. 왜냐하면 b_{n-1} 과 b_{n-2} 를 알아야 하는데 이 값들 역시 b_{n-3} 과 b_{n-4} 의 계산 없이 구할 수 없기 때문이다. 물론 일반항을 이용한다면 쉽게 계산할 수 있다. 아래와 같은 피보나치수열의 일반항은 다소 복잡해 보일 뿐만 아니라 점화식보다 피보나치수열의 생성방식을 이해하는 데는 불편하다.

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



[문제] 수열을 수식으로 표현하는 두 가지 방법에 관해 제시문을 근거로 200자 내외로 서술하시오.

연습 B : 2010학년도 숭실대 논술문항 일부변형

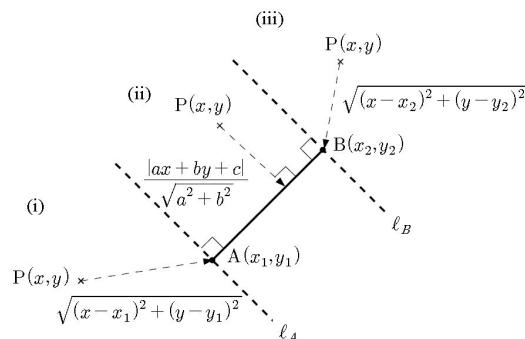
* 제시문 (가)와 (나)를 읽고 문제에 답하시오.

[가] 두 상점 A와 B의 좌표가 각각 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 이고, 두 상점의 경쟁력이 α, β 이다. 그리고 고객 P에서 상점 A까지의 거리와 B까지의 거리가 각각 $\overline{PA}, \overline{PB}$ 일 때, 점 (x, y) 에 위치한 고객 P에 대한 상점 A와 B의 흡인력을 다음과 같이 결정한다.

$$\text{상점 A의 흡인력 } \frac{\alpha}{\overline{PA}^2}, \text{ 상점 B의 흡인력 } \frac{\beta}{\overline{PB}^2}$$

이 때, 고객은 두 상점 가운데 흡인력이 더 큰 상점을 이용한다고 한다.

[나] 한 점 $P(x, y)$ 에서 선분 $\overline{AB}$ 까지의 거리는 점 $P(x, y)$ 와 선분 $\overline{AB}$ 의 위치에 따라 다음 <그림>과 같이 세 가지 경우로 나누어 구할 수 있다. 이 때, 직선 $\overleftrightarrow{AB}$ 의 방정식은 $ax + by + c = 0$ 이다.



<그림>

<그림>에서

- (i) 점 $P(x, y)$ 가 직선 l_A 의 아래쪽에 있을 때, 점 P에서 가장 가까운 선분 AB의 점 이 $A(x_1, y_1)$ 인 경우 점 P에서 선분 AB까지의 거리는 $\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$ 이다.
- (ii) 점 $P(x, y)$ 가 직선 l_A 와 l_B 의 사이에 있을 때, 점 P에서 가장 가까운 선분 AB의 점이 선분 AB의 내부에 있는 경우 점 P에서 선분 AB까지의 거리는

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

이다.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

(iii) 점 $P(x, y)$ 가 직선 l_A 의 위쪽에 위치하여 점 P 에서 가장 가까운 선분 AB 의 점이 $B(x_2, y_2)$ 인 경우 점 P 에서 선분 AB 까지의 거리는 $\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$ 이다.

[논제] 다음 물음에 답하십시오

- 좌표평면 위에 경쟁력 3인 상점 $A(1, 2)$ 와 경쟁력 2인 상점 $B(2, 1)$ 가 있다. 제시문 (가)를 이용하여 조사한 결과에 의하면 점 (x, y) 에 위치한 고객 P 에 대한 상점 A 와 B 의 흡인력이 같다고 한다. 이때, 점 (x, y) 가 만족하는 조건을 집합으로 나타내시오.
- 상점 C [좌표 $(1, 2)$, 경쟁력 1]와 선분으로 이루어진 마트 DE [D 의 좌표 $(0, 0)$, E 의 좌표 $(2, 0)$, 경쟁력 2]가 있다. 고객으로부터 마트 DE 까지의 거리는 제시문 (나)에서 설명한 ‘점에서 선분까지의 거리’로 정의된다. 고객의 위치가 제시문 (나)의 (ii)에 해당할 때, 마트의 흡인력이 상점의 흡인력보다 크기 위한 조건을 집합으로 나타내시오.

[기본지식 1] 수열은 귀납적으로 정의될 수 있다. 수열에서 처음 몇 개 항의 값들과 이웃하는 항들 사이의 관계로 정의할 경우 수열의 귀납적 정의라고 한다.

예를 들면 피보나치수열 $\{a_n\}$ 은 다음과 같이 귀납적으로 정의할 수 있다.

- $a_1 = 1$, $a_2 = 1$
- $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

[기본지식 2] 부등식의 영역을 이용하여 주어진 조건 하에서 최소비용 등을 구해내는 것과 같이 경제, 경영, 산업공학 등의 학문에서 주로 다루는 것 중의 하나가 선형계획법(Linear Programming)이다. 원가절감, 소비자들의 매장방문욕구 극대화, 효율적인 상품 유통경로 확립 등은 바로 이 최적화에서 비롯하며 결국 합리적인 이동거리의 최소화가 바람직한 해결책이다.

- 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 의 거리는

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- 좌표평면 위의 한 점 $P(m, n)$ 로부터 직선 $l: ax + by + c = 0$ 에 이르는 거리는

$$\frac{|am + bn + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



제2강 제시문과 논제의 이해

자연계 논술 문항에 대한 해결과정은 일반적으로 다음의 4단계를 통해 이루어진다.

- ① 논제의 분석 : 논제를 주어진 조건과 요구사항으로 나눌 필요가 있다.
- ② 제시문의 분석 : 제시문은 발문의 목적과 배경지식의 제공이라는 두 가지 목적을 갖는다. 논제와 아울러 출제자의 의도를 파악할 수 있으므로 어떠한 내용이 제공 되고 있는지 분석하는 것은 매우 중요한 일이다. 또한 논리적 서술을 위한 근거의 확보가 중요하다. 이 때 근거는 제시문이나 자신의 배경지식에서 확보한다.
- ③ 답안의 개요작성 : 논점을 파악하고 이에 대한 자신의 주장과 근거를 만들었다면, 어떻게 표현하여 이해시킬 것인지의 전략이 필요하다. 이를 설계하는 과정 또는 추론의 과정을 개략적으로 작성하는 것이 개요작성이다.
- ④ 답안 쓰기 및 검토 : 개요에 따라서 답안을 쓰고 최종적으로 답안을 수정하는 과정이다.

1. 논제의 분석

논제는 문제를 해결하는 첫 단계이며 제시문에서 활용할 내용에 대한 지식과 답안을 구성해야할 내용이 담겨져 있다. 논제의 분석을 다음의 3단계로 나누어 보자.

[1단계] 논제를 조건과 요구사항으로 나눈다.

[2단계] 겉으로 드러난 논점 이외에 숨겨진 의도가 있는지 보아야 한다. 논제를 분석하다 보면 의미가 분명하지 않은 문장이나 단어가 들어가는 경우도 있다. 따라서 논제에서 모호하거나 광범위한 의미로 사용되는 문장이나 단어는 주어진 제시문이나 논제의 전후 문맥을 통하여 분석해봐야 한다. 아울러, 주어진 수식이나 그래프는 반드시 그 의미를 해석하고 활용한다. (주어진 수식과 그림, 그래프는 묻고자하는 의도를 간접적으로 제시해주는 좋은 자료이다.)

[3단계] 논제분석을 통하여 해결할 내용의 순서를 정해 답안의 기본골격을 잡는다.

이는 논제에서 벗어나지 않은 답안을 구성하게 해준다. 답안의 순서는 다양하게 정할 수 있다. 해결내용의 경중에 따라 답안의 순서를 정하는 것도 하나의 방법이 된다. 가장 중요한 해결내용은 전체 글의 중심이 되어야한다.

2. 제시문 분석

(1) 제시문의 성격

첫째는 발문을 위한 내용의 전개이다. 논제 자체가 갖는 함축적 의미가 크므로 이를 보강해주고 논제해결에 바탕이 되는 선개념이나 어떠한 내용이 필요한지 사전에 알려주는 역할이다. 또한, 그림이나 그래프 등의 자료해석형 문항에서 도표를 제시하고 이를 설명하는 자료를 제공하기도 한다.

둘째는 교육과정의 심화내용에 대한 근거 제시이다. 논술은 암기된 지식을 답안으로 쓰는 것보다 사고과정과 답안을 전개하는 과정을 중요시한다. 따라서 고등학교 교육과정의 심화 지식을 사용할 수 있지만 모든 교육과정 내용의 암기를 원하지 않는다. 다만, 이러한 지식을 활용하거나 추론할 수 있는지의 능력을 측정하므로 심화내용을 찾아내어 활용하는 이해분석력이 중요하다. 따라서 자연계 제시문은 인문 논술같이 전체 내용을 파악하고 핵심 문장을 찾는 것보다 논제를 분석하여 무엇을 요구하는지 논점을 분명히 알고 이에 대한 활용자료로 인용하는 것이 좋다.

위에 언급한 논제 분석에 따라 논점 파악이 되면 제시문에서 활용해야 될 부분이 분명해지고 답안의 일관성과 통일성을 유지하기 쉽다. 하지만 논제에서 요구하는 논점과 관련된 내용이 제시문에 나타나지 않는 경우에는 자신의 배경지식을 끌어와서 활용해야 한다. 이러한 배경지식은 결국, 제시문과 연관된 교육 과정내용에 있으며 이것은 교과서에 담겨져 있으므로 자신이 지금까지 배워왔던 기본적인 교과서의 내용과 제시문의 내용을 연결하는 연습이 필요하다.

(2) 제시문 분석 방법

제시문의 분석은 논제의 논점과 연결하여 이루어져야 한다. 순서상 논제분석 후 제시문을 분석하지만, 대략 내용의 파악을 위해 제시문을 먼저 읽어 보고 자세한 분석을 논제분석 후 실시하는 것도 한 방법이 된다. 제시문 분석 방법은 다음과 같이 진행한다.

첫째, 제시문의 읽기 : 제시문을 개략적으로 읽고 주요 내용을 인식한 후 논제분석이 이루어지면 더욱 효율적이다. 이때, 너무 많은 시간을 제시문 읽기에 빼앗기지 않도록 한다. 어차피 제시문은 여러 번 읽으면서 분석이 이루어져야 한다. 한 번에 많은 욕심을 부리기보다 필요한 단계의 내용만 처리하는 것이 효율적이다.

둘째, 필요한 부분의 발췌 : 논제의 요구에 맞추어 필요한 근거 또는 내용을 추출하는 작업이다. 주요 용어나 수식은 그대로 발췌하여 사용하는 것이 바람직하며, 인문논술과 같이 내용을 변형하는 독해작업은 중요하지 않다. 간단하게 밑줄을 그어 근거 또는 주장 등으로 분리해두는 작업도 좋다. 여러 번 읽어서 놓치는 부분이 없도록 세심하게 보는 것이 중요하다. 아울러 답안의 윤곽을 생각하며 찾아본다.



셋째, 배경지식과의 연결 : 논술문항에서 제시문의 내용은 답안에 필요한 지식을 제공하지만 전부 제공하지는 않는다. 교육과정을 통해 충분히 학습한 내용은 제공하지 않기 때문이다. 따라서 심화내용이 제공되었다면 이와 연관된 교과단원의 기본내용은 자신의 배경지식으로부터 활용하여 표기한다.

[예 1] 2009 연세대 수시논술 문제 일부

xy -평면 위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 단위원 C 가 있다. 고정점 $A(-1,0)$ 부터 시계 방향으로 원 C 위의 한 점 P 까지의 호의 길이를 $l(P)$ 라고 하자. 원 C 위의 임의의 두 점 P_1 과 P_2 에 대하여 연산 $P_1 \oplus P_2$ 를 점 P_1 부터 원 C 를 따라 시계 방향으로 $l(P_2)$ 만큼 더 이동하여 얻어지는 점으로 정의하자. 그러면 이 연산은 교환법칙과 결합법칙을 만족함을 쉽게 알 수 있다.

[논제] 점 P 가 원 C 위의 임의의 한 점이라고 할 때, 연산 $\oplus$ 에 대하여 P 의 항등원과 역원을 나타내는 점은 어떠한 점인지 각각 설명하시오.

[논제분석] 주어진 조건은 무엇인가? 요구사항은 무엇인가?

요구사항	연산 $\oplus$ 에 대하여 점 P 의 항등원을 나타내는 점
	연산 $\oplus$ 에 대하여 점 P 의 역원을 나타내는 점
주어진 조건	원 위의 점에서의 연산과 항등원, 역원
출제의도	일반연산에서 대수적으로 사용하던 항등원과 역원의 개념을 기하학적으로 적용시킨다.

[제시문 분석] 논제를 해결하는 데 제일 중요한 개념은 무엇인가?

핵심어, 핵심내용	$l(P)$ 의 정의 : 고정점 $A(-1,0)$ 부터 시계 방향으로 원 C 위의 한 점 P 까지의 호의 길이
	연산 $P_1 \oplus P_2$ 의 정의 : 점 P_1 부터 원 C 를 따라 시계 방향으로 $l(P_2)$ 만큼 더 이동하여 얻어지는 점.
배경지식	집합 M 에 연산 $\circ$ 이 정의되어 있을 때, 집합 M 의 임의의 원소 a 에 대하여, $a \circ e = e \circ a = a$ ($e \in M$)가 될 때, e 를 연산 $\circ$ 에 대한 항등원이라고 하고, $a \circ x = x \circ a = e$ ($x \in M$)가 될 때, x 를 연산 $\circ$ 에 대한 a 의 역원이라고 한다.
전체	단위원 위에 주어진 상황에 알맞은 그림을 그려서 해결한다.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

[예 2] 2008학년도 인하대 논술문항 일부변형

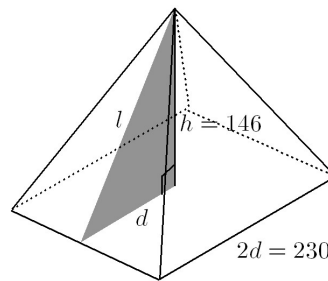
■ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하라.

(가) 세계 7대 불가사의 중의 하나인 기자에 있는 쿠푸 왕의 피라미드에는 황금비가 숨어있다. 기원전 2650년 경 지어졌다고 추측되는 이 피라미드로부터 당시 이집트인들이 황금비의 값을 알고 있었을 것으로 추정된다.



쿠푸 왕의 피라미드

(나) 피라미드에서는 길이나 넓이의 비가 일정한 값이 되는 경우가 많다. 여러 가지 경우를 계산해보면서 그러한 경우를 조사해보자. 계산을 편리하게 하기 위하여 밑면의 모서리의 길이를 모두 230m, 높이를 146m라고 하자.



밑면의 모서리의 길이를 $2d$, 옆면인 삼각형의 높이를 l 이라고 하면 $l^2 = d^2 + h^2$ 이므로 $l = \sqrt{115^2 + 146^2}$ 이고 따라서 계산기를 사용하여 구하면

$$l = 185.85$$

이다. 옆면의 넓이를 계산해보면

$$\frac{1}{2} \times 230 \times 185.85 = 21372.75$$

로 이 값은 높이의 제곱인 21316과 거의 같다. 당시의 설계 도면이 전해지지 않아 구체적인 것은 알 수 없지만 앞에서의 계산에 의해 고대 이집트인들은 다음과 같은 원리로 피라미드를 건축하였다고 가정해볼 수 있다.

[가정1] 피라미드의 밑면은 정사각형으로 건축한다.

[가정2] 피라미드 옆면의 넓이는 높이의 제곱과 같도록 건축한다.

[문제] $l=1$ 로 놓았을 때, 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정오각형의 한 변의 길이가 피라미드 옆면의 모서리의 길이와 같음을 추정하여라. (단, $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 이다.)

* 문제 분석

“반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정오각형의 한 변의 길이”와 “ $l=1$ 일 때의 피라미드 옆면의 모서리의 길이”를 각각 계산하여 추정하여야 한다.

* 제시문 분석

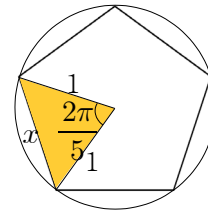
제시문에는 원에 내접하는 정오각형의 한 변의 길이를 구하는 내용에 대한 정보가 없다. 다만 피라미드의 밑면이 정사각형, 옆면의 넓이는 높이의 제곱과 같다는 가정을 이용하여 피라미드 옆면의 모서리의 길이를 구하여야 한다.

* 참고답안

먼저 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정오각형의 한 변의 길이를 x 라 하자.

어두운 삼각형에서 제2코사인법칙을 사용하면

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 + 1 - 2\cos \frac{2\pi}{5} = 2 - 2\frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ &= 2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \\ \therefore x &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \end{aligned}$$



한편 [가정2]로부터 옆면의 넓이는 높이의 제곱과 같으므로 $dl = h^2$ 이다.

이 식을 $l^2 = d^2 + h^2$ 에 대입하면

$$l^2 = d^2 + dl, \left(\frac{l}{d}\right)^2 = 1 + \frac{l}{d}, \frac{l}{d} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$l=1 \text{ 이므로 } \frac{1}{d} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ 이다.}$$

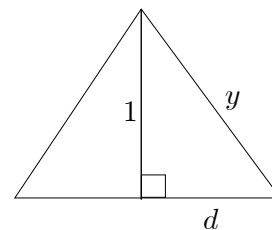
☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

따라서 정오각형의 한 변의 길이는 $l=1$ 일 때

피라미드 옆면의 모서리의 길이 피타고라스의 정리에 의해 $y = \sqrt{1+d^2}$ 인데

$$d = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ 이고 } d^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ 에서}$$

$$y = \sqrt{1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \text{ 와 같다.}$$



곧 $l=1$ 로 놓았을 때, 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정오각형의 한 변의 길이가 피라미드 옆면의 모서리의 길이와 같음을 알 수 있다.

☞ 연습 A : 2008학년도 경희대 논술문항 일부변형

어느 저수지의 물 1l에 분포하는 미생물의 개체수 $y(t)$ 는 t (단, $t \geq 0$)일 후에

$$y(t) = \frac{2000}{1 + 4 \times 10^{-\frac{t}{10}}}$$

이라고 한다. $y(t)$ 의 극한값을 저수지의 물 1l 속에 분포하는 미생물의 한계개체수라고 할 때, 저수지의 물 1l 속에 분포하는 미생물의 개체수가 며칠 후에 한계개체수의 50%에 이르게 되는지를 추정하시오. (단, $\log_{10}2 = 0.3$, $\log_{10}3 = 0.5$, $\log_{10}5 = 0.7$)

[기본지식] 지진의 규모, 소리의 크기, 별의 밝기 정도를 수로 나타낼 때에 흔히 지수 또는 로그를 사용한다. 이처럼 일상생활에서 큰 수 또는 작은 수를 나타낼 때 지수와 로그를 사용하여 나타내면 계산을 신속하고 간단하게 할 수 있다. 또한 광통신에서 광섬유로 빛을 전송할 때 발생하는 손실을 계산할 때에서도 지수와 로그를 사용하면 편리하다.

(1) 양의 실수 a 와 자연수 n 에 대하여 a 를 n 번 거듭제곱한 것을

$$a^n = a \times a \times \cdots \times a \text{ (} a \text{를 } n \text{번 곱한 것)}$$

으로 정의한다. $\sqrt[n]{a}$ 는 방정식 $x^n = a$ 의 양의 실수해로 정의한다.

(2) 양의 실수 a 와 두 자연수 m, n 에 대하여 유리수 지수는 다음과 같이 정의한다.

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$\sqrt[m]{a^n}$ 은 $x^m = a^n$ 의 양의 실수해로 정의한다.

(3) 양의 실수 x 로 수렴하는 양의 유리수열 $r_1, r_2, r_3, \dots$ 와 양의 실수 a 에 대하여, 수열 $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots$ 은 a^x 으로 수렴한다.



(4) 1이 아닌 양의 실수 a 와 실수 x , 양의 실수 y 에 대하여

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

로 정의한다.

(5) 로그의 성질

$a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$ 일 때, 다음과 같은 식이 성립한다.

- ① $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ ② $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
 ③ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ ④ $\log_a M^k = k \log_a M$ (k 는 실수)

연습 B : 2010학년도 중앙대 논술문항 일부변형

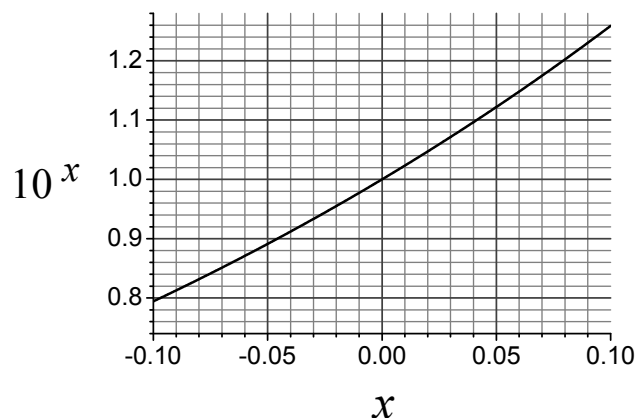
* 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

어느 실험실에서는 빛이 특정 매질을 통과할 때 발생하는 증폭 또는 손실을 표시할 때, dB(데시벨)이라는 단위를 비교적 자주 사용한다.



위의 그림과 같이, 빛이 매질을 통과하기 전의 빛의 세기를 P_{IN} , 통과한 후 빛의 세기를 P_{OUT} 이라 할 때, 빛의 손실을 dB로 계산하면 아래의 식으로 정의된다.

$$\text{손실 [dB]} = -10 \log_{10} \left(\frac{P_{OUT}}{P_{IN}} \right)$$



[논제] 제시문에 근거하여, 특정매질을 1m 지날 때마다 발생하는 빛의 손실이 2%임을 dB(데시벨) 단위로 표현하되 그 과정을 수식을 이용하여 설명하시오. 또, 이 특정매질을 100m 지난 후의 빛의 손실을 dB(데시벨) 단위로 구하시오. 필요한 경우 위의 그래프를 이용하시오.

제3강 수리논술의 답안작성

논제의 분석 → 제시문의 분석 → 답안의 개요 잡기 → 답안 쓰기 및 검토

1. 답안의 개요잡기

논술은 논리적으로 서술하여 상대방을 설득할 수 있어야 한다. 이 때, 논리적 서술은 근거를 통해 자신의 정당성을 확보하는 과정이다. 따라서 자신이 주장하는 내용에 대해 제시문이나 자신의 배경지식을 바탕으로 적절한 논리적 추론 과정을 통해 근거와 주장을 연결한다. 서론, 본론, 결론의 형식에 입각하여 답안을 작성할 필요는 없지만 일관성 있는 답안작성을 위해 다음과 같은 요소를 고려하는 것이 바람직하다.

- ① 논하고자 하는 관점을 모두 반영한다.
- ② 답안을 구성하는 해결전략을 글로 구성하되 논리적인 비약이 없어야 한다.
- ③ 중요한 수식이나 그림을 지나치게 자세하게 늘어놓기보다 핵심과정을 기술한다. ④ 답안의 검토 과정에서 글의 방향이나 내용이 바뀌면 개요작성 부분에서 수정하고 답안을 다시 구성한다.

2. 답안 쓰기 및 검토

개요작성을 한 후 답안을 쓰고 최종적으로 답안을 수정할 때, 다음 사항을 고려하는 것이 바람직하다.

- ① 개요와 답안의 구성이 일치하도록 쓴다.
- ② 용어는 가급적 논제 또는 제시문에서 주어진 내용을 그대로 사용한다. 논제와 제시문에서 언급하지 않은 기본적인 수식의 경우는 정의를 하고 사용한다.
- ③ 설명하는 글은 이해하기 쉬운 용어를 사용하고, 자신의 배경지식을 활용할 경우 내용에 대한 정확한 언급을 한 후 사용한다. 글의 표현에서 구어체나 비속어 등은 사용하지 않는다.
- ④ 문장은 가급적 짧고 명료하게 표현한다. 이중부정이나 중문은 피하도록 한다.
- ⑤ 수식의 전개과정은 기본 전제와 결론을 분명히 한다. 간단한 계산과정이나 불필요한 전개는 생략하고 근거를 정당화하는데 필요한 요점위주로 강조하여 표현한다.
- ⑥ 답안작성 후 정독하여 자신의 생각이 정확하게 표현되었는지 또는 전개과정에서 어색한 부분이 있는지를 찾아내어 필요한 경우 수정 보완하도록 한다.



[예 1] 2007학년도 이화여대 수시문제

시청 광장에 분수시계를 설치하려고 한다. 분수시계는 빨강, 노랑, 파랑, 초록, 보라의 5개 물줄기들로 구성되고, 오전 6시부터 오후 10시 직전까지 작동되도록 한다. 이 분수시계는 매 정시에 물줄기의 조합이 변함으로써 시간을 나타낸다. 항상 3개 이상의 물줄기가 나오고, 매 시간대를 표시하는 물줄기의 조합이 중복되지 않도록 분수시계를 설계하시오. 그리고 같은 조건에서 이 분수시계가 24시간 작동하도록 설계하는 것이 가능한지 논하시오.

[답안 개요잡기]

① 분수시계 설계가 가능한지 판단한다.

5가지 색깔의 물줄기에서 3가지 색깔 이상의 물줄기를 고르는 조합 수는 ${}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 16$ 이다.

② 3개 이상의 물줄기의 조합이 중복되지 않게 구체적으로 표현한다.

③ ‘분수시계를 설계하시오’ 는 분수시계를 설치하는 도면을 그리는 것보다 그 방법을 수학적으로 설명하는 것이 중요하다.

④ 표로 정리하거나 적절한 형식으로 분수시계를 설치하는 방법을 설명한다.

오전 6시		오후 2시	노랑, 초록
오전 7시	빨강, 노랑	오후 3시	파랑
오전 8시	빨강, 파랑	오후 4시	노랑, 보라
오전 9시	빨강	오후 5시	파랑, 초록
오전 10시	빨강, 초록	오후 6시	초록
오전 11시	빨강, 보라	오후 7시	파랑, 보라
정오	노랑	오후 8시	초록, 보라
오후 1시	노랑, 파랑	오후 9시	보라

⑤ 24시간동안 분수시계를 작동할 때 필요한 물줄기 수를 이용하여 분수시계 설계가 가능한지 판단한다.

[답안작성]

먼저 오전 6시부터 오후 10시 직전까지 매 정시에 물줄기의 조합이 변해야 하므로 각 시간에 따라 필요한 물줄기 수는 오전 7개, 오후 9개로 총 16개이다. 이 때 5가지 색깔의 물줄기에서 3가지 색깔 이상의 물줄기를 고르는 조합 수는

$${}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 16$$

가지이다. 물줄기의 색깔별로 표를 만들면 다음과 같다.

	06시	07시	08시	09시	10시	11시	정오	13시	14시	15시	16시	17시	18시	19시	20시	21시
빨강	○						○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
노랑	○		○	○	○	○				○		○	○	○	○	○
파랑	○	○		○	○	○	○		○		○		○		○	○
초록	○	○	○	○		○	○	○		○	○			○		○
보라	○	○	○	○	○		○	○	○	○		○	○			

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

하루의 시작을 알리는 오전 6시에는 5가지 색깔의 물줄기를 모두 사용한다. 3의 배수인 오전 9시, 정오, 오후 3시, 오후 6시, 오후 9시에는 4가지 색깔의 물줄기를 사용한다. 시간 별로 사용하지 않는 색깔은 빨강, 노랑, 파랑, 초록, 보라의 순서로 한다. 나머지 시간(3의 배수가 아닌 시간)에는 3가지 색깔의 물줄기를 사용한다. 이 조건에서 사용할 수 있는 물줄기의 조합 수는 16개이다. 따라서 같은 조건에서 분수시계가 24시간 작동하는 것은 불가능하다.

[예 2] 2010학년도 서울시립대 모의논술문항 변형

포물선 $y = ax^2 + bx$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식이 다음과 같음을 미분을 이용하여 보이시오.

$$\frac{y_1 + y}{2} = ax_1x + b\frac{x_1 + x}{2}$$

[답안 개요잡기]

점 (x_1, y_1) 이 포물선 $y = ax^2 + bx$ 위의 점이므로 $y_1 = ax_1^2 + bx_1$ 이다.

$y' = 2ax + b$ 이므로 포물선위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - y_1 = (2ax_1 + b)(x - x_1)$$

이 식에서 y 를 x 에 대하여 정리한 후 $y_1 = ax_1^2 + bx_1$ 을 대입하여 $y + y_1$ 을 구한다.

[답안작성]

$y = ax^2 + bx$ 에서 $y' = 2ax + b$ 이므로 포물선위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$y - y_1 = (2ax_1 + b)(x - x_1)$$

이다. 이 식에서 y 를 x 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$y = 2ax_1x + bx - 2ax_1^2 - bx_1 + y_1$$

점 (x_1, y_1) 이 포물선 $y = ax^2 + bx$ 위의 점이므로 $y_1 = ax_1^2 + bx_1$ 이다. $y_1 = ax_1^2 + bx_1$ 를 이용하여 $y + y_1$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y + y_1 &= 2ax_1x + bx - 2ax_1^2 - bx_1 + 2y_1 \\ &= 2ax_1x + bx - 2ax_1^2 - bx_1 + 2(ax_1^2 + bx_1) \\ &= 2ax_1x + b(x_1 + x) \end{aligned}$$

위의 식의 양변을 2로 나누면 보이하고자 하는 식을 얻게 된다.

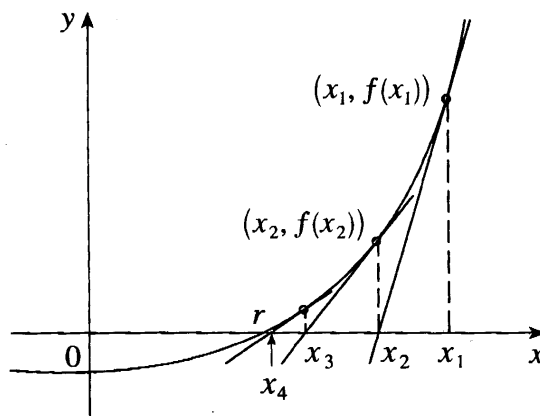


연습 A : 2010학년도 경희대 논술문항 일부변형

※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

인수분해, 근의 공식, 그래프를 이용하는 등 대수적 방법과 기하학적 방법으로 방정식 $f(x)=0$ 의 해(또는 근)를 대부분 구할 수 있다. 그러나 이러한 방법으로도 해를 구할 수 없는 방정식이 존재한다. 이 경우, 아래 그림과 같이, 함수 $y=f(x)$ 의 x 절편이 방정식 $f(x)=0$ 의 해와 같다는 성질과 $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 해의 근삿값을 구하는 방법을 생각해 볼 수 있다.

방정식 $f(x)=0$ 의 해 중 하나를 x_0 라 하자($f(x_0)=0$). 함수 $y=f(x)$ 의 x 절편 x_0 의 근삿값을 구하기 위하여 $f(x_1) \neq 0$ 이고 $f'(x_1) \neq 0$ 이며 근 x_0 에 충분히 가까운 임의의 초기값 x_1 을 잡고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(x_1, f(x_1))$ 에서의 접선을 생각한다. 이 접선의 x 절편, 즉 접선과 x 축이 만나는 점을 x_2 라 하자. 계속하여 $(x_2, f(x_2))$ 에서의 접선의 x 절편을 구하여 x_3 라 하고, 이 과정을 반복하여 수열 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 를 구하면, 이 수열 $\{x_n\}$ 은 함수 $y=f(x)$ 의 x 절편 x_0 , 즉 $0=f(x)$ 의 해 x_0 에 일반적으로 수렴한다.



[논제] 제시문에 기술한 방법을 수학적으로 표현하고자 한다. 임의의 초기값 $x_1 (\neq x_0)$ 에 대하여,

- (1) 미분가능한 함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점의 좌표를 구하시오.
- (2) x_2 를 $x_1 (\neq x_0)$, $f(x_1)$ 과 $f'(x_1)$ 으로 표현하시오.
- (3) $n \geq 1$ 일 때, x 절편 x_{n+1} 을 바로 전 x 절편 x_n , $f(x_n)$ 과 $f'(x_n)$ 으로 표현하시오.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

📖 연습 B : 2008학년도 고려대 수시논술

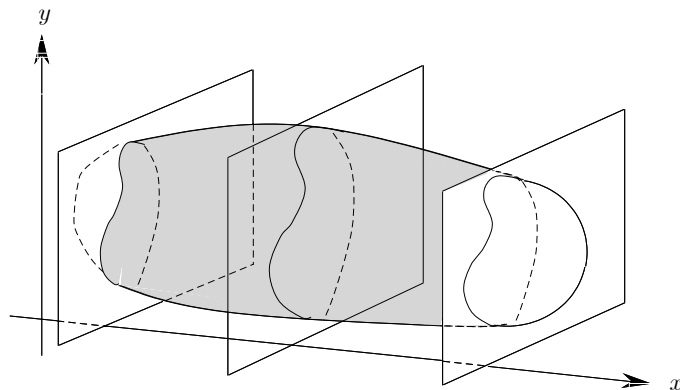
※ 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

X-선 컴퓨터 단층촬영(X-ray CT)은 물질 내에 있는 불순물의 크기를 밝히는데 사용되기도 한다. 모 회사 연구소에서 세라믹 내부에 크기를 알 수 없는 금속 불순물 덩어리 하나가 발견되었다. 이 불순물의 부피를 알기위해 x 축을 따라가며 10mm 간격으로 단층촬영을 한 결과 불순물의 단면의 넓이가 아래 표와 같이 주어졌다.

x 축 단면 위치(mm)	0	10	20	30	40	50
불순물의 단면적(mm^2)	0	2	6	3	2	0

측정을 더 정확히 하기 위해 7mm 간격으로 단층촬영을 한 번 더 하여 아래의 표를 얻었다.

x 축 단면 위치(mm)	0	7	14	21	28	35	42	49
불순물의 단면적(mm^2)	0	2	8	6	6	4	2	0



[논제] 불순물의 부피를 가급적 정확하게 얻는 방법을 제안하고 부피를 추정해보시오. 그리고 그 타당성에 대해 논술하시오.



제 2 부 - 수리논술을 위한 논증

제 4 강 : 직접증명

제 5 강 : 귀류법 (歸謬法)

제 6 강 : 귀납적 추론과 수학적 귀납법

제 2 부 - 수리논술을 위한 논증



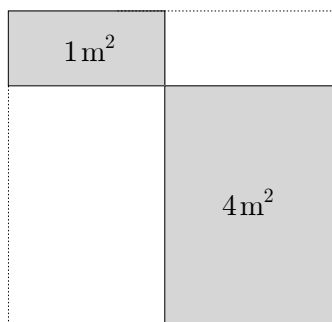
제 4 강 직접증명

수학적인 명제가 필연적으로 참이라는 것을 설명하는 과정을 증명이라 한다. 증명된 명제를 정리(Theorem), 증명되지는 않았지만 참이라고 생각되는 명제를 추측(Conjecture) 또는 가설(Hypothesis)이라고 부른다. 증명에는 직접증명과 간접증명이 있는데 직접증명은 고대 그리스 수학자들의 노력에 의하여 발전하였다. 여기서 **직접증명**이란 공리와 정의, 정리를 결합하여 결론을 도출하는 증명 방법을 말한다. 즉, 이미 참인 명제를 이용한 논리적 과정을 통해서 새로운 결론을 도출하는 방법이라고 생각할 수 있다.

[예 1] 2006학년도 고려대 수시문제 변형

※ 다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

아래 그림과 같이 두 개의 직사각형을 각각의 한 모서리에서 서로 붙였다. 그리고 각 직사각형에서 이 모서리와 만나지 않는 두 변의 연장선을 그린 후, 그림과 같이 큰 직사각형을 만들었다. 처음 두 직사각형의 넓이가 1m^2 과 4m^2 으로 일정하다고 가정할 때 큰 직사각형의 넓이의 최솟값을 구하시오.



※ 증명을 위한 조언

두 양수 a, b 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{단, } a=b \text{ 일 때 등호성립})$$

이 때, $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{2ab}{a+b}$ 를 각각 a 와 b 의 산술평균, 기하평균, 조화평균이라고 한다.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

※ 해설

넓이가 1m^2 과 4m^2 인 두 직사각형의 가로의 길이를 각각 x , y (단, $x > 0$, $y > 0$)라 하자. 그러면 세로의 길이는 각각 $\frac{1}{x}$ 과 $\frac{4}{y}$ 이다. 이때 큰 직사각형의 가로의 길이는 $x+y$ 이고, 세로의 길이는 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{따라서 큰 직사각형의 넓이는, } & (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right) \\ &= 1 + \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} + 4 \\ &\geq 5 + 2\sqrt{\frac{4x}{y} + \frac{y}{x}} = 9 \end{aligned}$$

$\frac{4x}{y} = \frac{y}{x}$ 일 때, 등호가 성립하므로 최솟값은 9이다.

[예 2] 2009학년도 경희대 논술문제 변형

다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

수학적으로 모든 원은 닮은꼴이며 같은 원에서는 어느 점에서나 굽은 정도가 같다. 또한 원은 어느 방향으로든지 재든지 폭(지름의 길이)은 일정하다. 원과 관련하여 유용한 정리로 등주정리와 등적정리가 있다.

등주정리 : 둘레의 길이가 같은 도형 중에서 넓이가 가장 넓은 도형은 원이다.
 등적정리 : 넓이가 같은 도형 중에서 둘레의 길이가 가장 짧은 도형은 원이다.

- [논제] (1) 등주정리로부터 등적정리를 유도하시오.
 (2) 등적정리로부터 등주정리를 유도하시오.

※ 해설

- (1) 먼저 등주정리가 성립한다고 가정하자. 어떤 원과 둘레의 길이가 같은 임의의 도형이 있다고 하면 등주정리에 의하여 원의 넓이가 임의의 도형의 넓이보다 더 넓다. 원의 넓이와 임의의 도형의 넓이가 같아지도록 원의 반지름을 줄여 더 작은 원을 만들자. 이 때 만들어진 새로운 원은 임의의 도형과 넓이는 같지만 둘레의 길이가 더 짧게 된다. 따라서 등적정리가 성립한다.
- (2) 먼저 등적정리가 성립한다고 가정하자. 어떤 원과 넓이가 같은 임의의 도형이 있다고 하면 등적정리에 의하여 원의 둘레가 임의의 도형의 둘레보다 더 짧다. 원의 둘레와 임의의 도형의 둘레가 같아지도록 원의 반지름을 늘여 더 큰 원을 만들자. 이 때 만들어진 새로운 원은 임의의 도형과 둘레는 같지만 넓이가 더 크게 된다. 따라서 등주정리가 성립한다.



연습

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

어떤 조건을 만족하는 점 전체로 구성 된 도형을 그 조건에 적합한 점들의 기하학적 위치(Geometric Locus of Points, GLP)라고 하며, 간단히 자취라고 한다. GLP를 구하는 문제의 풀이에는 다음 두 가지를 포함해야 한다.

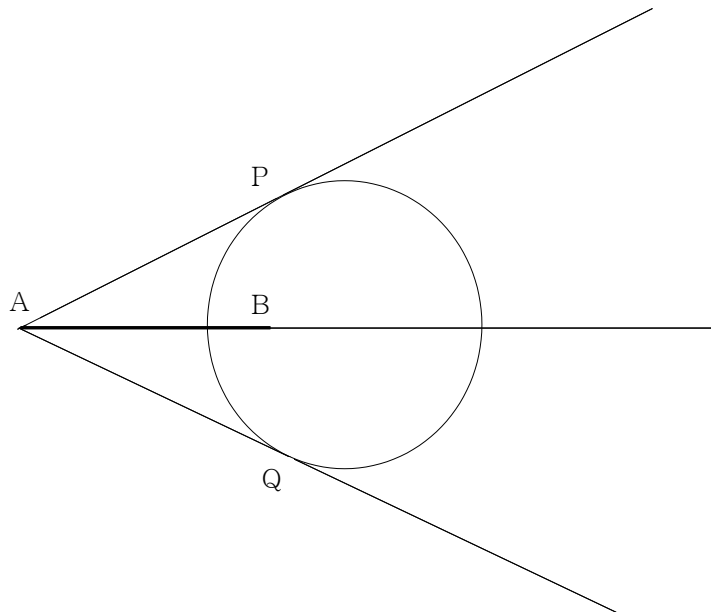
[조건1] 요구되는 조건을 만족하는 점들이 문제의 답인 도형에 포함되어야 한다.

[조건2] 도형의 모든 점은 요구되는 조건을 만족한다.

일반적으로 두 점 A, B에 이르는 거리의 비가 $m:n$ 인 점의 자취는 선분 AB의 $m:n$ 내분점과 외분점을 지름의 양끝으로 하는 원이 되며, 이것을 아폴로니우스의 원(Apollonius)의 원이라고 한다.

[문제1] 평면위의 두 점 A, B가 있다. $\overline{AM}:\overline{BM}=t:1$ 인 점 M의 GLP를 구하시오,

[문제2] 두 점 A, B에 이르는 거리의 비가 $m:n$ 인 점의 GLP를 S라고 하고, 점 B가 S의 내부에 있다고 하자. S 밖의 점 A에서 그은 두 접선 AP와 AQ를 작도하면, 직선 AB는 선분 PQ를 수직으로 이등분함을 증명하시오.



제5강 귀류법 (歸謬法)

결론을 부정하면 가정이나 이미 정리된 내용에 모순이 발생함을 보여줌으로써 ‘결론을 부정하는 것이 옳지 않다’ 라고 말함으로써 주어진 주장이 간접적으로 옳음을 보여주는 간접증명법의 하나이다. 귀류법에서 귀(歸)는 ‘돌아가다’ 는 뜻이고, 류(謬)는 ‘그릇되다’ , ‘어긋나다’ , ‘모순이다’ 라는 뜻이다.

[예 1] a, b, c 를 홀수라 할 때, 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 은 유리수의 해를 갖지 않음을 증명하시오.

※ 이해를 위한 조언

- 공리와 정의, 정리에 위배되는 경우를 찾는다.
- 귀류법을 사용하여, ‘ a, b, c 가 홀수인 경우에도 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 은 유리수의 해를 갖는다’ 는 명제에 모순이 있음을 보이면 된다.

※ 해설

a, b, c 는 홀수이고, $ax^2 + bx + c = 0$ 가 유리수의 해 $x = \frac{q}{p}$ (p, q 는 서로 소인 정수, $p > 0$)를 갖는다고

가정하자. $x = \frac{q}{p}$ 를 방정식에 대입하면 $a\left(\frac{q}{p}\right)^2 + b\left(\frac{q}{p}\right) + c = 0 \Leftrightarrow aq^2 + bpq + cp^2 = 0$ 이 된다. p, q 가 짝수, 홀수인 경우로 나누어 생각한다. p, q 는 서로 소인 정수이므로 동시에 짝수가 되는 경우는 없다.

i) p 는 홀수, q 는 짝수일 때 aq^2 , bpq 는 짝수, cp^2 은 홀수가 된다.

따라서 $aq^2 + bpq + cp^2 = (\text{짝수}) + (\text{짝수}) + (\text{홀수}) = (\text{홀수}) = 0$

ii) p 는 짝수, q 는 홀수일 때 aq^2 은 홀수, bpq , cp^2 은 짝수가 된다.

따라서 $aq^2 + bpq + cp^2 = (\text{홀수}) + (\text{짝수}) + (\text{짝수}) = (\text{홀수}) = 0$

iii) p 는 홀수, q 는 홀수일 때 aq^2 , bpq , cp^2 은 모두 홀수가 된다.

따라서 $aq^2 + bpq + cp^2 = (\text{홀수}) + (\text{홀수}) + (\text{홀수}) = (\text{홀수}) = 0$

어느 경우나 ‘(홀수)=0’이라는 결론이 나오게 되어 ‘(홀수) $\neq$ 0’이라는 사실에 모순이다. 따라서 주어진 명제의 결론을 부정하여 모순이 발생한 것이므로 귀류법에 의하여 주어진 명제는 참이다.

[예 2] $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 보이시오.



※ 이해를 위한 조언

먼저 주어진 명제를 가정과 결론으로 분류하자.

가정 : $\sqrt{2}$ 이다.

결론 : 무리수이다.

이제 결론을 부정하여 무리수가 아니라고 가정하자. 즉 유리수라고 가정한 셈이므로 유리수는 $\frac{m}{n}$

(m, n 은 서로소인 정수이고 $n \neq 0$)으로 나타낼 수 있다. $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ 의 양변을 제곱하여 m^2 을 곱하면 $n^2 = 2m^2$ 이다. 이 때 n^2 은 짝수이므로 n 도 짝수이다. $n = 2k$ (k 는 정수)로 놓아 이것을 $n^2 = 2m^2$ 에 대입하여 정리하면 $m^2 = 2k^2$ 이다. 이 때 m^2 은 짝수이므로 m 도 짝수이다. 즉, m, n 이 짝수인 정수가 되어 m, n 은 서로소인 정수라는 가정에 모순이다. 이는 $\sqrt{2}$ 가 무리수가 아니라는 가정에 모순이다. 따라서 $\sqrt{2}$ 는 유리수이다.

※ 참고 1

명제 ‘ n^2 은 짝수이면 n 이 짝수이다.’ 를 증명할 때는 대우인

‘ n 이 홀수이면 n^2 이 홀수이다.’

을 증명하는 것과 같다.

즉, $n = 2l + 1$ (l 은 정수)라 놓으면

$n^2 = (2l + 1)^2 = 2(2l^2 + 2l) + 1$ 이 되고 $2l^2 + 2l$ 이 정수이므로 n^2 은 홀수이다.

따라서 ‘ n^2 은 짝수이면 n 이 짝수이다.’

※ 참고 2

수학에서 어떤 수를 0으로 나누는 것을 제외한다. 그 이유는 다음과 같다.

0이 아닌 수 a 를 0으로 나눌 수 있다고 가정하고 그 값을 x 라고 가정하자. 즉, $a \div 0 = x$ 에서 $a = 0 \times x$ 가 되어 결국 $a = 0$ 이 된다. 이것은 가정에 모순이다. 따라서 0이 아닌 수 a 를 0으로 나눌 수 없다.

※ 참고 3

증명에는 가정에서 결론을 직접 이끌어내는 직접증명법과 우회적인 방법으로 결론

을 이끌어내는 간접증명법이 있다. 피타고라스의 정리를 증명하는 것은 직접증명이고 범죄와 전혀 관련이 없는 사람이 사건이 일어나는 시각에 범죄현장에 있지 않고 다른 곳에 있었다는 것을 밝히는 것 (부재증명, 알리바이)이 간접증명에 해당한다.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

📖 연습 : 2007학년도 서강대 논술문항

* 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

고대 그리스인들은 관찰을 통해 어떤 자연수는 그보다 작은 자연수에 의해서 나뉠 수 있는 반면에 다른 자연수들은 이런 특성이 없다는 알아냈다. 자연수 중에서 1과 자신을 제외한 어떤 숫자로도 나뉠 수 없는 수를 소수(素數)라 부른다. 또한 소수가 아닌 자연수 중에서 1이 아닌 수를 합성수(合成數)라 부른다. 언뜻 생각하기에는 소수와 합성수의 구분이 아무런 의미도 없는 것처럼 보인다. 그러나 오늘날 소수는 그 특성 때문에 매우 중요하게 취급되고 있으며, 수학자들이 소수에 대해서 더 많은 사실을 발견하면 할수록 그 중요성은 더 높이 평가되고 있다. 소수가 이처럼 중요한 이유 중 하나는 자연수에서 소수가 하는 역할이 화학에서 원자의 역할과 같다는 것이다.

소수에 대한 분명한 물음은 이런 것이다. 도대체 소수는 얼마나 많이 있는 걸까? 유클리드는 자신의 저서 『기하학 원론』에서 소수의 개수가 무한하다는 것을 증명했다. 그의 증명을 간략히 서술하면 아래와 같다.

“유한개만의 소수가 존재한다고 가정하자. 이 유한개의 소수들을 모두 곱한 값에 1을 더하면 그것 역시 소수이며, 처음에 가정한 유한한 소수 집합에 속하지 않는다. 그러므로 소수가 유한하다는 가정은 모순이 됨을 알 수 있다.”

[문제 1] 다음 글의 논리를 논리적으로 설명하시오.

“소수가 이처럼 중요한 이유 중 하나는 자연수에서 소수가 하는 역할이 화학에서 원자의 역할과 같다는 것이다.”

[문제 2] 소수의 개수가 무한하다는 유클리드의 증명을 부연하여 논술하시오.



제6강 귀납적 추론과 수학적 귀납법

1. 귀납적 추론

논리학에서 일반적인 것으로부터 특수한 것을 추론하는 것을 연역법(deduction)이라고 하고, 개개의 사례를 관찰함으로써 이러한 사례들이 포함되는 일반 명제를 확립시키기 위한 추론을 귀납법(induction)이라고 한다. 연역적 추론에서는 전제가 참이면 결론도 필연적으로 참이어야 한다. 그러나 귀납적 추론에서는 전제가 참이라고 해서 결론이 참이라는 것은 보장되어 있지 않다. 결론이 참일 가능성만 가질 뿐이고 반례가 하나만 나오더라도 이 논리는 무너질 수 있다. 따라서 귀납에 근거한 논리는 엄밀한 의미에서는 논리라고 할 수 없다.

[예] 두 수의 대소 관계 추측

자연수 n 에 대하여 두 수 $\frac{1}{n!}$, $\frac{1}{2^{n+2}}$ 의 대소 관계를 추론해보자.

n 에 차례로 1, 2, 3을 대입하여 두 수의 대소 관계를 비교하면

$n=1$ 일 때, $\frac{1}{1!}=1$, $\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ 이므로 $\frac{1}{1!}>\frac{1}{2^{1+2}}$ 이다.

$n=2$ 일 때, $\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$ 이므로 $\frac{1}{2!}>\frac{1}{2^{2+2}}$ 이다.

$n=3$ 일 때, $\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$ 이므로 $\frac{1}{3!}>\frac{1}{2^{3+2}}$ 이다.

$n=4$ 일 때, $\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$, $\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$ 이므로 $\frac{1}{4!}>\frac{1}{2^{4+2}}$ 이다.

...

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-2}}$ 이다.

그러나 $n=6$ 일 때, $\frac{1}{6!}=\frac{1}{720}$, $\frac{1}{2^8}=\frac{1}{512}$ 이므로 $\frac{1}{6!}>\frac{1}{2^{6+2}}$ 이다.

또한 $n=6, 7, \dots$ 일 때, $\frac{1}{n!}>\frac{1}{2^{n+2}}$ 임을 확인할 수 있다. 오히려 6이상인 자연수 n 에 대하여

$\frac{1}{n!}>\frac{1}{2^{n+2}}$ 일 것이라 추론할 수 있다.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

2. 수학적 귀납법

수학에서는 귀납법적인 형태를 가지고 있지만 귀납법이 가지고 있는 논리적인 한계를 극복한 ‘수학적 귀납법(Mathematical induction)’을 많이 사용한다. 수학적 귀납법은 수학에서 가장 기본적인 추론의 방법이라고 할 수 있다. 수학적 귀납법은 관찰에서부터 추론하는 개개의 n 이 아니라 “임의의 n ”에 대하여 성립하는 명제를 단숨에 증명하는 방법을 제시하여 준다. 이것은 본질적으로 “무한의 반복”인 추론을 간결하게 단 하나의 추론으로 요약하여 보여준다고 할 수 있다. 수학적 귀납법에서 우리는 비로소 “무한”을 멋지게 다루는 방법에 접하게 될 것이고, 또 참으로 수학적이라고 하기에 어울리는 추론의 묘미를 맛 볼 수가 있다. 수학적 귀납법을 간단히 정리하면 다음과 같다.

“자연수로 정의된 명제 $p(n)$ 에 대하여
 $n=1$ 일 때 $p(1)$ 이 참이고
 $n=k$ 일 때, 명제 $p(k)$ 이 참이라고 가정할 때, $n=k+1$ 일 때, 명제 $p(k+1)$ 이 참임을 보이면 명제 $p(n)$ 은 모든 자연수에 대하여 참임을 확인 할 수 있다”

앞에서 언급한 등식 $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2\cdots\cdots\textcircled{1}$ 을 수학적 귀납법으로 증명하면 다음과 같다.

(i) $n=1$ 일 때, 등식 $\textcircled{1}$ 에서

(좌변)=1, (우변)= $1^2=1$ 이므로 등식 $\textcircled{1}$ 은 $n=1$ 일 때 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

이 성립한다. 이때, $\textcircled{2}$ 의 양변에 $2k+1$ 을 더하면

$$\begin{aligned} 1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1) \\ = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2 \quad \cdots\cdots\textcircled{3} \end{aligned}$$

$\textcircled{3}$ 은 등식 $\textcircled{1}$ 의 n 에 $k+1$ 을 대입한 것과 같으므로

등식 $\textcircled{1}$ 은 $n=k+1$ 일 때에도 성립한다.

그러므로 모든 자연수 n 에 대하여 $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$ 이 성립한다.



[예 1] 2006학년도 고려대 논술문항 일부변형

다음 논증에 문제점이 있으면 지적하고, 주장을 정당화하기 위한 합리적인 논증을 제시하시오.

“1부터 100까지의 자연수들의 합은 101을 백 번 더해서 2로 나눈 것과 같고, 1부터 1000까지의 자연수들의 합은 1001을 천 번 더해서 2로 나눈 것과 같고, 1부터 10000까지의 자연수들의 합은 10001을 만 번 더해서 2로 나눈 것과 같잖아. 이와 같이 모든 자연수 n 에 대해 1부터 n 까지의 자연수들의 합은 $n+1$ 을 n 번 더해서 2로 나눈 수와 같을 거야. 아직까지 이 조건이 성립하지 않는 예를 발견한 사람은 없잖아?”

※ 논증을 위한 조언

위 주장은 1부터 100까지, 1부터 1000까지, 1부터 10000까지의 자연수들의 합을 예로 들며 모든 자연수 n 에 대해 성립한다는 귀납적 추리를 하고 있다. 그러나 이 경우 반례 하나만 나와도 오류가 생길 수 있다. 이 문제는 다음과 같이 완전한 증명이 가능한 수학적 귀납법을 사용하는 것이 합리적이다.

모든 자연수 n 에 대하여 1부터 n 까지 자연수들의 합은 $n+1$ 을 n 번 더해서 2로 나눈 수와 같다. 즉,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ 임을 증명해보자.}$$

$$n=1 \text{ 일 때, (좌변)}=1=\frac{1(1+1)}{2}=(\text{우변}) \text{ 이므로 성립}$$

$$n=k \text{ 일 때 성립한다고 가정하면 } 1+2+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2} \text{ 이다.}$$

$$\text{양변에 } k+1 \text{ 을 더하면, } 1+2+\dots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ 이므로}$$

$n=k+1$ 일 때도 성립한다.

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ 는 모든 자연수 } n \text{ 에 대하여 성립한다.}$$

(참고) 귀납적 추론은 개개의 사례를 관찰함으로써 이러한 사례들이 포함되는 일반 명제를 확립시키기 위한 추론을 뜻한다. 귀납적 추론은 과거의 경험으로부터 얻은 결과를 통해 미래의 결과를 미루어 짐작하는 것을 말하는데 부분적 관찰에서 결론을 도출한 것이므로 이 결론이 절대 진리가 되지 않을 수도 있다.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

[예 2] 자연수 n 에 대하여 “명제 $p(n) : \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}$ ” 이 항상 성립함을 수학적 귀납법의 방법으로 증명하시오.

※ 증명을 위한 조언

$n=1$ 일 때 $p(1) : \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

$n=k$ 일 때, $p(k) : \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{4k^2-1} = \frac{k}{2k+1}$ 가 참이라고 가정하면,

$$\begin{aligned} p(k+1) : & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4(k+1)^2-1} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{4(k+1)^2-1} \\ &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k+1}{2k+3} \end{aligned}$$

이 참이므로 모든 자연수 n 에 대하여 명제 $p(n)$ 은 참이다.

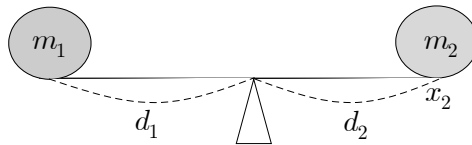
(참고) 이 명제를 약간 어렵지만 직접증명법으로도 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} p(n) : & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{4n^2-1} \\ &= \frac{1}{4-1} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{36-1} + \cdots + \frac{1}{4n^2-1} \\ &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] \\ & \quad \left(\because \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$



연습 A : 2009학년도 서울시립대 논술문항 일부변형

시소의 양 끝에 질량이 m_1 과 m_2 인 두 사람이 앉아 있고, 중심으로부터 거리는 각각 d_1 , d_2 이다. 시소가 한 쪽으로 기울지 않고 평형이 되려면 $m_1d_1 = m_2d_2$ 를 만족하여야 한다 (단, 시소의 질량은 무시한다). 이를 지렛대의 법칙이라고 부른다.



[문제]

- (1) 질량이 m_1, m_2 인 2개의 물체가 수직선 위의 좌표 x_1, x_2 에 위치하고 있을 때의 질량중심을 지렛대의 원리를 사용하여 구하여라.
- (2) 질량이 $m_1, \dots, m_n$ 인 n 개의 물체가 수직선 위의 좌표 $x_1, \dots, x_n$ 에 위치하고 있을 때의 질량중심을 지렛대의 원리를 사용하여 추정하여라.
- (3) 위 (2)의 결과를 수학적 귀납법으로 검증하시오.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

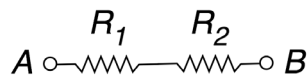
📖 연습 B : 2008학년도 고려대 논술문항 일부변형

두 개의 저항을 [그림 1]과 같이 연결하는 방법을 직렬연결이라 하고, [그림 2]와 같이 연결하는 방법을 병렬연결이라 한다. 크기가 R_1 과 R_2 인 두 개의 저항을 직렬 연결할 때, 합성 저항 R 은 각 저항의 합과 같다.

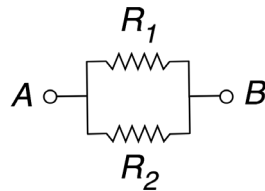
$$R = R_1 + R_2$$

그리고 크기가 R_1 과 R_2 인 두 개의 저항을 병렬 연결할 때, 합성 저항의 역수는 각 저항의 역수의 합과 같다

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

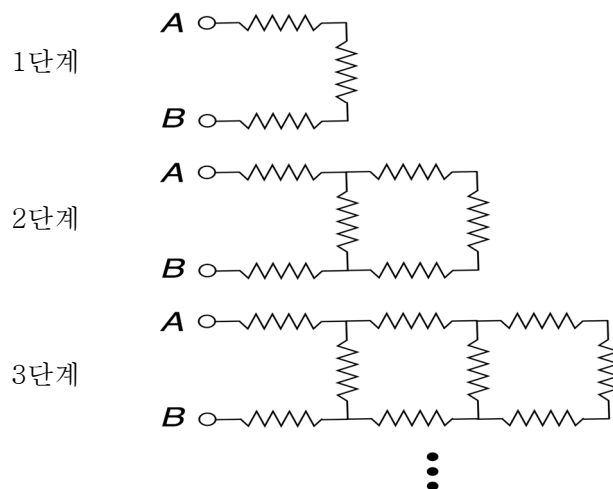


[그림 1]



[그림 2]

[논제] [그림 3]과 같이 $1\ \Omega$ 의 저항을 각 단계마다 계속해서 세 개씩 붙여나갈 때, 수학적 귀납법을 이용하여 A와 B 사이의 합성 저항이 감소함을 설명하시오.



[그림 3]



제 3 부 - 수리논술을 위한 수학적 사고

제 7 강 : 확률

제 8 강 : 적분의 활용

제 9 강 : 항등원과 역원, 피보나치수열

제 10 강 : 나선

제 3 부 - 수리논술을 위한 수학적 사고



제7강 확률

1. 통계적 확률과 수학적 확률

일기예보에서 ‘내일 비가 올 확률이 50%이다’라는 말을 들었다고 하자. 우산을 가지고 나가야 할까? 말아야 할까? 50%를 숫자로 고치면 100분의 50이므로 2분의 1이다. 즉, 내일 비가 올 확률이 50%라는 말은 비가 올 가능성과 비가 오지 않을 가능성이 같다는 것이다. 이 정보를 듣고 내일 우산을 가지고 나갔다가 비가 오면 우산을 잃어버리는 경우가 거의 없지만 비가 오지 않으면 우산을 잃어버릴 가능성이 많다. 대개 일기예보는 특정 기간의 과거 자료와 경험 자료를 바탕으로 컴퓨터를 이용하여 예측되기도 하고, 대기의 움직임(풍향, 풍속, 기압, 기온, 구름의 위치와 종류 등)에 대한 자료를 바탕으로 컴퓨터의 프로그램으로 예측되기도 한다.

보통 수학에선 확률을 통계적 확률과 수학적 확률로 구별한다. 여기서 ‘통계적’이란 축적된 자료에 바탕을 둔 것이고, ‘수학적’이란 같은 정도로 기대된다는 가정에 바탕을 둔 것이다. 이런 관점에서 통계적 확률은 경험적이고, 수학적 확률은 이론적이다. 실제로 자연 현상이나 사회 현상에서 어떤 사건의 결과가 같은 정도로 일어날 것이라고 기대할 수 없는 경우가 흔히 있다. 그러나 시행을 여러 번 반복하여 나타난 결과를 면밀히 관찰하면 전체적인 경향을 파악할 수 있다. 예를 들어, 어떤 공장에서 불량품이 생산될 확률, 어느 지점에서 교통사고가 일어날 확률 등과 같이 과거의 통계적 자료를 바탕으로 나타난 확률은 장래의 예측에 도움이 된다. 일반적으로 시행의 횟수가 커짐에 따라 상대도수는 일정한 값에 가까워지는 것으로 알려져 있다. 이런 관점에서 시행의 횟수가 큰 경우 상대도수를 통계적 확률로 간주하기도 한다.

[통계적 확률]

시행횟수 n 이 커짐에 따라 사건 A 가 일어나는 횟수를 r 이라 하면 상대도수 $\frac{r}{n}$ 이 일정한 값 p 에 가까워질 때, 이 일정한 p 를 통계적 확률이라 한다.

[수학적 확률]

어떤 시행의 표본공간 S 가 n 개의 근원사건(한 원소로만 이루어진 사건)으로 이루어져 있고 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A 가 r 개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A 가 일어날 확률 $P(A)$ 를

$$P(A) = \frac{r}{n}$$

로 정의하고, 이것을 수학적 확률이라 한다.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

2. 시행, 표본공간, 사건

- (1) 시행: 동전이나 주사위를 던지는 것과 같이 동일한 조건 아래에서 반복할 수 있는 실험이나 관찰
- (2) 표본공간 : 어떤 시행에서 일어나는 모든 결과들의 집합
- (3) 사건 : 표본공간의 부분집합

3. 조건부확률의 정의

사건 A 가 일어났을 때, 사건 B 가 일어날 확률' 을 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률이라 한다.

$$P(A) > 0 \text{ 일 때, } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

4. 기하학적 확률

경우의 수가 너무 많아 셀 수 없는 경우 또는 각 사건이 일어나는 영역의 크기가 서로 달라 경우의 수로 계산할 수 없는 경우에 사용되는 확률로 전체 영역에 대한 발생영역의 길이, 넓이, 부피의 비로 나타낸다.

[예] 생일이 같은 사람이 있을 확률

두 팀이 축구경기를 하고 있다. 축구장엔 양 팀 선수가 각각 11명씩 모두 22명, 주심 1명, 선심 2명이 뛰고 있다. 이 25명 중 적어도 2명 이상이 생일이 같은 확률은 얼마나 될까? 실제로 매 축구경기마다 25명의 생일을 물어서 몇 명인 지 파악하면 상대도수를 구할 수 있다. 축구팀이 달라질 때마다 상대도수는 확률은 달라지겠지만 계속 반복하여 시행하면 이 상대도수는 일정한 수에 가까워질 것이므로 근사적인 통계적 확률을 구할 수 있을 것이다. 그러나 이런 접근은 번거롭고 비현실적이다. 이런 관점에서 이들 25명 중에 생일이 같은 사람이 있을 수학적 확률은 몇 퍼센트쯤 될까? 25명이 모두 생일이 다를 확률을 구하여 계산하면 더 편리하다. 윤년이 생일인 경우를 제외하고 25명 모두 일년 365일 중 하루를 생일로 갖는다고 가정하여 한 사람을 선택하고 나머지 24명의 생일이 이 사람과 다를 확률을 계산하면

$$\frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \cdots \times \frac{342}{365} \times \frac{341}{365}$$

이고 이 값은 약 0.43 이다. 따라서 축구장의 25명 중 적어도 2명 이상의 생일이 같은 확률은 $1 - 0.43 = 0.57$ 즉, 57%이다. 때로는 직관에 근거한 판단보다 계산에 의한 판단이 더 중요함을 알 수 있다.

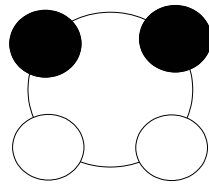


연습 A : 2008학년도 고려대 논술문항 일부변형

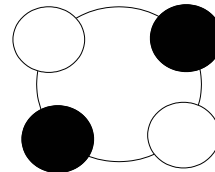
(가) 어떤 시행의 표본공간 S 가 n 개의 근원사건으로 이루어져 있고 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A 가 r 개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A 가 일어날 확률 $P(A)$ 를 다음과 같이 정의하고, 그것을 수학적 확률이라고 한다.

$$P(A) = \frac{r}{n}$$

예를 들어 검은 구슬 두 개와 흰 구슬 두 개를 짝어 염주를 만드는 경우를 생각해 보자.
구슬 색의 배치에 따라 다음과 같이 두 가지 종류의 염주를 만들 수 있다.



a형 염주



b형 염주

구슬의 색을 보지 않고 임의로 구슬을 배치할 때 a형 염주가 만들어지는 사건을 A 라 하자. 표본공간 S 가 두 개의 근원사건으로 이루어져 있으며 사건 A 는 한 개의 근원사건으로 이루어져 있으므로 사건 A 가 일어날 확률 $P(A)$ 는

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

이다.

(나) 어느 제약회사에서 1만 정의 알약을 생산하였다. 그런데 1정의 알약이 모조 알약으로 바뀌는 일이 발생하였다. 알약이 진품인가 모조품인가를 구별하는 기술을 이용할 경우 진품 알약은 90%의 확률로 진품으로 판정되고 10%의 확률로 모조품으로 판정된다. 그리고 모조품 알약은 90%의 확률로 모조품으로 판정되고 10%의 확률로 진품으로 판정된다.

임의의 알약 1정을 검사한 결과 모조품이라는 판정이 나왔다. 이 때 그 알약이 모조품일 확률은 90%이다.

[논제] 제시문 (가)와 (나)에서 올바르게 서술되지 않은 부분이 있다면 바르게 고치고, 그 과정을 설명하시오.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

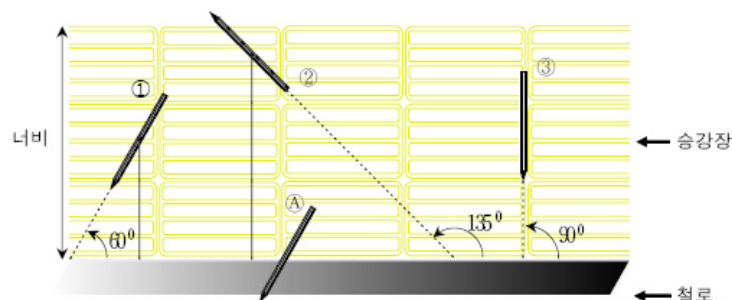
📖 연습 B : 2009학년도 서강대 논술문항 일부변형

※ 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

[가] 우리는 대부분의 경우 사람들과 사회적 관계 속에서 일어나는 여러 가지 사건(현상)을 경험하며 살고 있다. 이러한 관계는 구성원간의 약속을 통하여 만들어지곤 한다. 약속의 연속이 매일을 이룬다고 하여도 무방할 것이다. 다음에 제시되는 이야기는 흔히 우리가 경험하는 것인데, 이를 과학적으로 접근하여, 호기심을 가질 만한 수치를 얻고 그 의미를 찾아보기로 하자.

진우와 서희는 친구 사이로 서울의 다른 지역에 거주한다. 일요일인 오늘 진우는 서희에게 전화를 하여 지하철 신촌역 근처에 있는 서점에 들러 미분적분학 교재를 사기로 약속한다. 그들은 만남의 편리함 때문에 자주 이용하던 신촌역에서 만나기로 정한다.

[나] 두 사람은 정오부터 오후 1시 사이에 신촌역 앞에서 만나 같이 서점에 가기로 하였다. 지하철 도착시각표를 모두 잘 알고 있는 그들은 기다리는 시간을 줄이기 위하여 먼저 도착한 사람이 도착한 직후부터 정확히 10분만 기다린 후 서점으로 향하기로 하였다. 서희는 약속장소인 신촌역으로 가기 위하여 집 근처 역에서 지하철을 기다리다가 아래 그림 □와 같이 철로변 승강장 가장자리에 걸쳐있는 연필 한 자루를 발견하였다.



[다] 얼마 후 신촌역에서 만난 두 사람은 그들이 만날 수 있다는 사실에 놀랐다. 왜냐하면 서로 10분만 기다리기로 하였기 때문에 역에서 만날 가능성이 낮을 것이라고 생각하였기 때문이다. 두 사람은 그들이 실제로 만날 수 있을 확률을 계산해 보기로 하였다. 그들은 x -축, y -축을 진우, 서희가 각각 도착 가능한 시간 축으로 하는 표본 공간을 구성하고 둘이 만날 수 있는 경우를 생각해 보았다.

[논제] [다]를 이용하여, 두 사람이 실제로 만날 수 있는 확률 값에 대하여 논술하라.



제8강 적분의 활용

적분은 단순히 넓이와 부피를 측정하는 것 이외에도 움직이는 것, 특히 연속적인 변화를 하는 물체의 운동을 파악하는 데 중요한 도구가 된다. 예를 들어 인공위성의 속도와 가속도, 행성의 궤도계산, 야구공의 속도와 가속도, 생물체의 번식률, 꽃가루의 확산 속도, 인구증가율, 도형의 길이 등 여러 상황을 분석하는 데 도움이 된다.

(1) 넓이 구하기

함수 $y=f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

(2) 부피 구하기

구간 $[a, b]$ 의 임의의 점 x 에서 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$ 인 입체의 부피 V 는 다음과 같다.

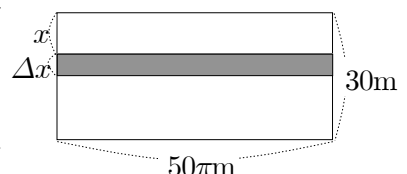
$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (\text{단, } S(x) \text{는 구간 } [a, b] \text{에서 연속})$$

특히 x 축의 구간 $[a, b]$ 에서 연속인 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V 는 다음과 같다.

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

[예] 물을 저장하는 저수조(물탱크)는 수면으로부터의 깊이에 따라서 다른 수압을 받는다. 수면으로부터 깊이가 x m인 곳에서 저수조의 면에 수직으로 미치는 수압은 1 m^2 당 x 톤, 즉 $x \text{ t/m}^2$ 라고 한다. 반지름이 25 m인 원통형 저수조에 30 m 높이까지 물이 찼을 때, 이 저수조에 미치는 힘을 구하려고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 압력은 단위 넓이에 미치는 힘이므로, 어떤 물체에 미치는 힘은 (압력)×(넓이)로 구할 수 있다. 오른쪽 그림은 위의 원통형 저수조의 옆면을 펼친 모습이다. 이 때 수면으로부터의 깊이가 x m인 지점에서 $(x+\Delta x)$ m인 지점까지의 색칠한 부분의 넓이와 Δx 가 충분히 작을 때 이곳에 미치는 힘을 구하여라.



(2) 수면으로부터의 깊이가 30 m일 때, 이 저수조에 미치는 힘을 구분구적법을 이용하여 구하여라.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

- (3) 수면으로부터의 깊이가 30 m일 때, 이 댐에 미치는 힘을 정적분을 이용하여 구하고 이를 (2)의 결과와 비교하시오.

* 해설

- (1) 수면으로부터의 깊이가 x m인 지점에서 $(x + \Delta x)$ m인 지점까지의 색칠한 부분의 넓이는 $50\pi \times \Delta x = 50\pi \Delta x (\text{m}^2)$ 이다. 그리고 Δx 가 충분히 작을 때, 이 구간에 미치는 압력은 깊이가 x m인 지점에서의 압력인 xt/m^2 으로 생각할 수 있으므로 이 부분에 미치는 힘은 (압력) $\times$ (넓이) = $x \times 50\pi \Delta x = 50\pi x \Delta x$ (t)이라 할 수 있다.
- (2) 수면의 깊이 30m를 n 개의 구간으로 등분을 하면 k 번째 구간이 받는 압력은 $\frac{30}{n} \times k$ 이 된다. 그리고 각 구간의 길이는 $\Delta x = \frac{30}{n}$ 이므로 각 구간의 넓이는 $\frac{30}{n} \times 50\pi$ 이다. 곧, k 번째 구간에 미치는 힘은 $\left(\frac{30}{n} \times 50\pi\right) \times \frac{30}{n} k$ 이 된다. 곧 n 개 구간에 미치는 힘들의 합은 $\sum_{k=1}^n \left(\frac{30}{n} \times 50\pi\right) \times \frac{30}{n} k$ 이며 이 댐에 미치는 힘은 $n \rightarrow \infty$ 일 때의 극한값이다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{30}{n} \times 50\pi\right) \times \frac{30}{n} k &= 30 \cdot 50\pi \cdot 30 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= 30 \cdot 50\pi \cdot 30 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 30 \cdot 50 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2} \pi \\ &= 22500\pi \text{ (t)} \end{aligned}$$

- (3) 깊이가 x m인 구간에서의 힘은 $50\pi x \Delta x$ 이므로 수면에서부터 깊이가 30 m인 구간까지의 힘의 합은 다음 정적분으로 구할 수 있다.

$$\int_0^{30} 50\pi x dx = 50\pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{30} = 25 \cdot 900\pi = 22500\pi \text{ (t)}$$

이므로 (2)의 결과와 같음을 알 수 있다.

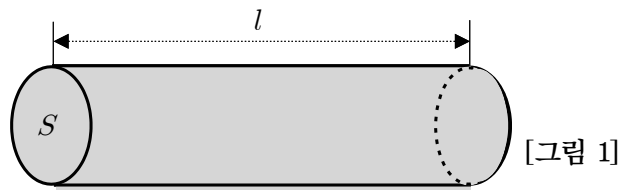


연습 A : 2009학년도 인하대 논술문항 일부변형

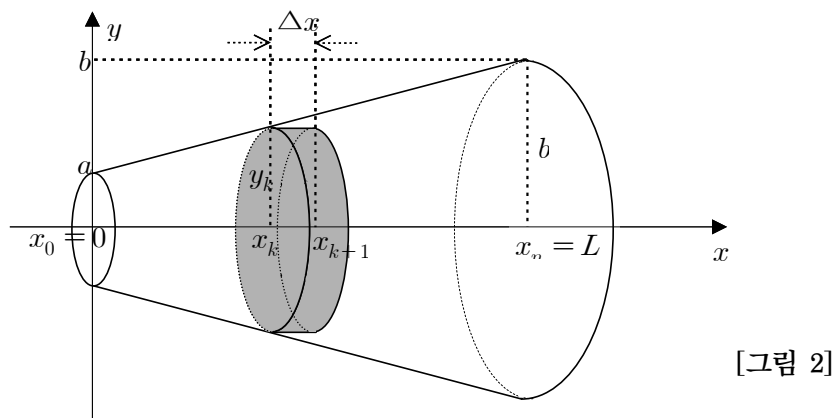
[가] 구분구적법은 적분의 기본 원리로서, 어떤 도형의 넓이나 부피를 구할 때 그 도형을 여러 개의 간단한 도형으로 세분하여 이들 도형의 넓이나 부피의 합을 구한 후, 이 합의 극한값으로 원래 도형의 넓이나 부피를 구하는 방법이다. 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 의 정적분을 구분구적법을 이용하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \quad (\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k \Delta x)$$

[나] 도선의 저항은 도선의 길이가 길수록 커지며 단면적이 클수록 작아진다. 이것은 도선의 길이가 길수록 자유 전자와 금속 원자의 충돌 횟수가 많아져서 저항이 커지고, 도선의 단면이 클수록 단면을 통과하는 자유 전자의 수가 많아져서 전류가 잘 흐르기 때문이다. 따라서 [그림 1]과 같은 도선의 저항 R 은 도선의 길이 l 에 비례하고 단면적 S 에 반비례한다. 비례상수를 ρ 라 하면 $R = \rho \frac{l}{S}$ 이다. 여기서 ρ 는 물질의 종류에 따라 정해지는 상수로서 물질의 비저항이라고 한다.



[다] [그림 2]와 같이 잘려진 원뿔형 도선의 저항은 잘게 세분한 원기둥 도선의 저항의 합을 구한 후, 이것의 극한으로 구할 수 있다. 즉, 작은 원기둥을 이용한 구분구적법을 이용하여 구할 수 있다.



잘려진 원뿔형 도선의 중심 길이를 L 이라 하고 이것을 n 등분하여 작은 원기둥의 합으로 근사시키자.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

$\Delta x = \frac{L}{n}$, $x_k = k \Delta x$ ($0 \leq k \leq n$) 라 놓고, x_k 지점에서 단면의 반지름을 y_k , 단면적을 S_k , 두께가 Δx 인 원기둥 조각의 저항을 ΔR_k 라고 하면, ΔR_k 는 $\rho \frac{\Delta x}{S_k}$ 가 된다. 그러면 잘려진 원뿔형 도선의 전체 저항은 구분구적법에 의해서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \rho \frac{\Delta x}{S_k}$ 로 주어진다. 여기에서 ρ 는 도선을 이루는 물질의 비저항이다.

[문제] 제시문 [가], [나], [다]에 주어진 내용을 바탕으로 다음을 기술하시오.

- (1) 제시문 [다]의 [그림 2]에서 주어진 원기둥 조각의 저항 ΔR_k 를 구하시오.
- (2) 제시문 [다]의 [그림 2]에서 주어진 중심 길이가 L 인 잘려진 원뿔형 도선의 전체 저항을 구하시오.

📖 연습 B : 2009년도 서강대 논술문항 일부변형

[가] 이탈리아의 경제학자 파레토는 100여 년 전 당시 이탈리아 인구의 20%가 전체 부(wealth)의 80% 이상을 소유하고 있고, 다른 국가들의 경우도 비슷하다는 것을 관찰하였다. 1992년 유엔의 한 보고서에서도 세계 인구의 20%가 전체 소득의 82.7%를 차지하고 있다고 발표하였다. 분배의 불균형에 관한 이런 관찰은 이제 일반화되어 파레토의 법칙(혹은 80-20 법칙)이라는 이름으로 여러 맥락에서 사용된다.

즉, 전체 원인의 20%가 전체 결과의 80% 이상을 가져오는 상황에 대해 파레토의 법칙을 언급한다. 예를 들어, 20%의 고객이 백화점 전체 매출의 80%를 차지하는 현상을 설명할 때 이 용어를 사용한다.

[나] 여러 통계에 따르면, 한 국가에서의 소득에 따른 인구분포는

$$(\text{소득이 } a \text{와 } b \text{ 사이에 있는 사람들의 수}) = \int_a^b x^{-p} dx$$

로 추정할 수 있다. 여기서 p 는 1보다 큰 상수이고, 사람 수와 소득의 단위는 편의상 무시한다. 그러면, 소득이 a 와 b 사이에 있는 사람들의 소득의 합은 $\int_a^b x^{1-p} dx$ 와 같다.

[문제 1] 정적분의 정의를 써서, 제시문 [나]의 밑줄 친 내용이 타당함을 설명하라.

[문제 2] 제시문 [나]에서, 어떤 국가의 소득에 따른 인구분포가 $p = \frac{3}{2}$ 인 경우로 조사되었고, 소득의 분포는 1에서 100까지 사이에 있었다. 소득 분배의 관점에서 이 국가는 파레토의 법칙을 만족하는지 혹은 아닌지를 논하라.



제9강 ▶ 항등원과 역원, 피보나치수열

1. 항등원과 역원

집합 S 에 연산 $\circ$ 이 정의되어 있을 때,

(1) 집합 S 의 임의의 원소 a 에 대하여

$$a \circ e = e \circ a = a \quad (e \in S)$$

일때, e 를 연산 $\circ$ 에 대한 항등원이라고 한다.

(2) e 가 연산 $\circ$ 에 대한 항등원이고

$$a \circ x = x \circ a = e \quad (x \in S)$$

일 때, x 를 연산 $\circ$ 에 대한 a 의 역원이라고 한다.

[예 1] 실수 전체 집합 R 의 임의의 두 원소 x, y 에 대하여 연산 $\star$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$(x+1) \star (y-2) = 3x - xy + 1$$

연산 $\star$ 에 대한 항등원을 구하고 역원이 존재하지 않는 경우에 대하여 설명하시오.

※ 해설

i) $x+1=a$, $y-2=b$ 라고 하면, $(x+1) \star (y-2) = 3x - xy + 1$ 에서
 $a \star b = 3(a-1) - (a-1)(b+2) + 1$ 을 정리하면 $a \star b = a + b - ab$

ii) 또, $b \star a = b + a - ba$ 이므로 $a \star b = b \star a$

따라서 연산 $\star$ 에 대한 교환법칙이 성립한다.

$a \star e = a$ ($e \in R$)를 만족하는 e 가 항등원이다. $a + e - ae = a$ 에서 $e(1-a) = 0$,
 따라서 $e = 0$ 이다.

iii) 연산 $\star$ 에 대한 교환법칙이 성립하므로, $a \star x = 0$ 을 만족하는 x 가 a 의 역원이다.

$$a + x - ax = 0 \quad \text{따라서} \quad x = \frac{a}{a-1} \quad (\text{단, } a \neq 1).$$

즉, a 의 역원은 $\frac{a}{a-1}$ 이지만, 1의 역원은 존재하지 않는다.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

2. 행렬

행렬은 복잡한 연립방정식을 풀 때 대단히 유용하게 쓰인다. 특히 제2차 세계대전 이후로 행렬이론을 적용한 선형계획법(Linear Programming)이 발전하였다. 한편 행렬은 양자역학은 물론 현대 암호학에서도 많이 활용되고 있다.

[예2] L사와 S사는 여러 나라에 현지 공장을 설립하여 컴퓨터와 휴대전화를 생산하고 있다. [표1]은 공장 수를 나타낸 표이고, [표2]는 한 공장 당 월평균 생산 대수를 나타낸 표이다.

	L사	S사
컴퓨터	a	b
휴대전화	c	d

[표1]

	L사	S사
컴퓨터	x	y
휴대전화	u	v

[표2]

두 회사에서 생산한 컴퓨터의 총생산량과 두 회사에서 생산한 휴대전화의 총생산량을 구하려고 한다. 행렬을 이용하여 구하는 방법에 관하여 설명하시오.

* 이해를 위한 조언

행렬의 곱셈을 하기 위하여 [표2]의 배열을 바꾼다.

[표1]을 행렬 A라 하고, [표2]의 배열을 아래 표처럼 바꾸고 행렬 B라 하자.

	컴퓨터	휴대전화
L사	x	u
S사	y	v

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & au+bv \\ cx+dy & cu+dv \end{pmatrix}$$

따라서, 두 회사에서 생산한 컴퓨터의 총생산량은 $ax+by$ 이고, 두 회사에서 생산한 휴대전화의 총생산량은 $cu+dv$ 이다.



연습 A : 2010학년도 광운대 논술문항 일부변형

암호의 역사는 고대 그리스 시대부터 사용했다고 알려져 있다. 행렬은 현대 암호학에서도 유용하게 쓰이고 있는데, 그 예를 들어보기로 하자. 주어진 문장을 <표 1>을 이용하여 숫자로 바꾼 후 행렬이나 함수의 성질을 이용하여 암호화하고자 한다.

<표 1> 문자와 수와의 대응관계 표

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u	v	w	x	y	z	.	♥	★	♠
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

만일, 암호문의 송신자가 “I love you” 라는 문장을 암호화하려고 한다면 우선 이 문장에 대응하는 수들을 차례로 나열한 수열 “9, 12, 15, 22, 5, 25, 15, 21” 을 구한다.

다음은 이들 수들의 배열을 4개씩 끊어서 2×4 행렬 $A = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 & 22 \\ 5 & 25 & 15 & 21 \end{pmatrix}$ 로 나타낸다. 그 다음에 행렬 $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 을 곱하여 다음과 같이 암호화하고,

암호문 “17, -14, 15, 24, 13, -1, 15, 23” 을 보낸다고 가정한다.

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 & 22 \\ 5 & 25 & 15 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -14 & 15 & 24 \\ 13 & -1 & 15 & 23 \end{pmatrix}$$

[문제 1] 송신자가 위와 같이 행렬을 이용하여 암호문을 만들고 송신할 때 암호문의 수신자가 암호문을 해독하려면 어떤 정보를 갖고 있어야 하는지 설명하시오. 또한, 이 정보가 암호문 해독 과정에서 어떻게 사용되는지 설명하시오.

[문제 2] 위와 같은 방법으로 암호화하고 해독하는 데 사용했던 행렬 B 대신에 다른 행렬 $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 를 이용하려고 한다. 이 때, 행렬 C는 어떤 성질을 갖고 있어야 하는지 수 a, b, c, d 사이의 관계를 이용하여 설명하시오.

[문제 3] 주어진 문장을 암호화하고 해독하는 데 제시문처럼 2×2 행렬을 이용하는 대신에 3×3 행렬을 이용할 수 있는지 판단하고 그 이유를 설명하시오.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

📖 연습 B : 2009학년도 연세대 논술문항 일부변형

* 다음 글을 읽고 논제에 답하시오.

XY -평면 위에 중심이 원점이고 반지름이 1인 원 C 가 있다. 고정점 $A(-1, 0)$ 부터 시계 방향으로 원 C 위의 한 점 P 까지의 호의 길이를 $l(P)$ 라고 하자. 원 C 위의 임의의 두 점 P_1 과 P_2 에 대하여 연산 $P_1 \oplus P_2$ 를 점 P_1 부터 원 C 를 따라 시계 방향으로 $l(P_2)$ 만큼 더 이동하여 얻어지는 점으로 정의하자.

[논제 1] 제시문에서 주어진 연산 $\oplus$ 은 교환법칙과 결합법칙을 만족함을 설명하시오.

[논제 2] 점 P 가 원 C 위의 임의의 한 점이라고 할 때, 연산 $\oplus$ 에 대하여 점 P 의 항등원과 역원을 나타내는 점은 어떠한 점인지 각각 설명하시오.

[논제 3] 원 C 위의 점으로 이루어진 수열 $\{P_n\}$ 이 $P_0, P_1, P_n = P_{n-1} \oplus P_{n-2}$ (단, $n=2, 3, 4, \dots$) 로 정의된다.

$P_0 = A$ 이고, P_1 은 $l(P_1) = \frac{\pi}{3}$ 인 원 C 위의 점일 때, $P_n = A$ 를 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오.

[논제 4] [논제 3]에서 k 가 임의의 자연수이고, $P_0 = A$ 이며, P_1 은 $l(P_1) = \frac{2\pi}{k}$ 인 원 C 위의 점일 때,

$P_n = A$ 를 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하는 방법에 대하여 논하시오.



제10강 나 선

‘나선’은 역사적으로나 과학적으로 많은 관심과 연구의 대상이었다. 기원전 250년경 아르키메데스가 나선 연구를 처음 시작하였는데, 이 연구를 통하여 당시의 다양한 수학적 난제들을 해결하고 이를 실생활에 활용하였다. 나선은 자연현상에서 빈번히 목격되는 현상으로서 소라껍질이나, 해바라기, 산양의 뿔, 먹잇감을 향해 날아가는 독수리의 비행 등에서 자연스럽게 나타난다. 입자들을 연구하는 안개상자 속의 입자의 궤적 또한 나선 모양이며, 다음과 같은 의미에서 고등학교 교과과정에서 중요한 주제이기도 하다.

- 나선은 곡선으로서 공간 이해력을 요구한다.
- 형태가 다양하여 그 움직임을 이해하기위해 논리적 사고력을 요구한다.
- 그 길이가 유한일 수도 무한일 수도 있어서 수열과 무한급수에 대한 이해가 동반되어야 한다.
- 나선과 연관하여 그릴 수 있는 도형들의 자취는 다양하고 흥미로운 현상을 보여주는데 이는 지적 호기심을 자극하며 상상력을 유발시킬 수 있다.
- 자연 과학, 사회 과학 등에서 나타나는 현상을 이해하는데 활용된다. 이것이 끊임없이 나선을 주목하는 이유이다.



[예 1] 나선탐구 1 : 솔방울의 씨앗은 나선 모양으로 배열되어 있다.

햇볕을 잘 받은 솔방울의 씨앗은 배열이 대칭적인 것이 대부분이다. 씨앗의 밑 부분을 살펴보면 씨앗이 나선을 이루며 배열되어 있다. 편의상 나선의 방향을 구별하기 위해 빨간 색과 파란 색으로 구별하여 색을 칠해 보았다. 파란 색 나선은 시계바늘이 회전하는 방향으로 중심에서 뻗어 나온 모양이고, 파란 색 나선은 시계바늘이 회전하는 방향과 반대방향으로 중심에서 뻗어 나온 모양이다. 파란 색 나선과 같은 방향의 나선은 몇 개일까? 또 빨간 색 나선과 같은 방향의 나선은 몇 개일까?

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

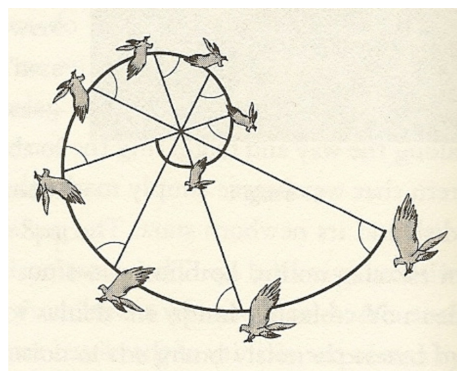


인내심을 가지고 집중력을 발휘하여 차근차근 세어보면 파란색 나선을 포함하여 파란색 나선 방향의 나선의 개수는 13개이고 빨간색 나선을 포함하여 빨간색 나선 방향의 나선의 개수는 8개이다. 13을 8로 나누면 1.625이다. 이는 미술가들이 즐겨 사용하는 황금비율 1.6에 가깝다. 실제로 8과 13은 두 수의 합이 다음 수를 결정하는 규칙에 따라 배열된 피보나치수열의 항이기도 하다.

피보나치수열 : 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , . . .

[예 2] 매가 만드는 나선곡선

독수리나 매는 먹이를 따라갈 때 등각나선을 따라 비행하는 것으로 알려져 있다. 특히 송골매는 시속 약 330km로 날 수 있다고 한다. 나선보다 직선으로 날면 훨씬 더 빠를 텐데 송골매는 왜 나선으로 나는 걸까? 이유는 매의 눈이 양 옆에 있어서 머리를 기준으로 한쪽 방향에 있는 목표물을 볼 수 있는 각도가 40도이기 때문이다. 송골매가 날아가며 만든 곡선은 등각나선이라 불린다. 왜냐하면 곡선 위의 한 점에서 그은 접선, 그리고 나선의 중심에서 점점까지 그은 직선이 이루는 각이 언제나 일정하게 같기 때문이다. 송골매는 최고 속도를 유지하면서도 자신의 먹이를 따라갈 수 있는 등각나선을 따라 날고 있는 셈이다.

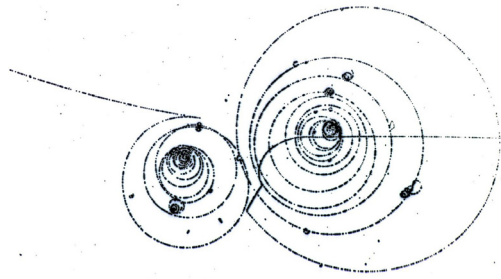


연습 A : 2010학년도 서울대 논술문항 일부

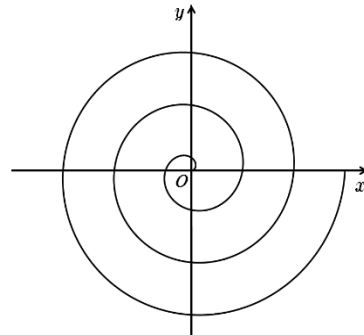
* 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.



20세기 초기에 새로운 입자들의 발견에는 안개상자 실험이 중요한 역할을 하였다. 전하를 띤 입자가 안개 속을 지나갈 때 작은 물방울이 형성되면서 [그림 1]과 같은 자취를 볼 수 있다. 안개상자에 자기장을 함께 걸어 주면 전하를 띤 입자는 자기력에 의하여 원 운동을 하며, 그 반지름은 입자의 운동량에 비례한다. 한편 움직이는 입자는 안개 입자 또는 공기와 부딪혀 연속적으로 조금씩 에너지를 잃어 원 운동의 반지름은 점차 줄어든다. 입자는 나선(와선) 모양을 따라 움직이다가 결국 모든 에너지를 잃고 정지한다.



[그림 1]



[그림 2]

기원전 250년경 아르키메데스는 한 나선을 연구하였는데, 그것은 좌표평면 위를 움직이는 점의 좌표 (x, y) 가 $x = \theta \cos \theta$, $y = \theta \sin \theta$ (단, θ 는 매개변수)로 정의되는 곡선으로서, $\theta \geq 0$ 인 경우 [그림 2]와 같은 자취를 갖는다. 아르키메데스는 자와 컴퍼스만으로는 작도가 불가능한 기하학의 문제들, 예컨대 각의 3등분 문제, 원의 넓이와 같은 정사각형을 찾는 문제 등을 이러한 나선을 사용하여 쉽게 해결할 수 있음을 보였다.

먹잇감을 향해 날아가는 독수리를 하늘 위에서 내려다보면, 독수리는 먹이를 가장 잘 관찰할 수 있는 각도를 유지하면서 날아간다. 독수리가 먹이를 가장 잘 관찰할 수 있는 방향은 날아가고 있는 방향이 아니라, 날아가는 방향에서 일정한 각도를 이루고 있다. 1638년 데카르트가 발견한 로그 나선 또한 이러한 성질을 가지고 있다. 즉, 로그 나선의 각 점에서의 접선과 그 점에서 나선의 중심을 잇는 선분이 이루는 각도는 항상 일정하다. 예를 들어, 좌표평면 위를 움직이는 점의 좌표 (x, y) 가 $x = e^{\theta} \cos \theta$, $y = e^{\theta} \sin \theta$ (단, θ 는 매개변수)로 주어지는 로그 나선은 각 점에서의 접선과 그 점에서 원점까지의 선분이 이루는 각도가 항상 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

[문제] 제시문의 로그 나선 $x = e^{\theta} \cos \theta$, $y = e^{\theta} \sin \theta$ 위의 한 점 P 에서 나선의 접선을 긋고, 원점 O 에서 선분 OP 에 수직인 직선을 그어 접선과 만나는 점을 Q 라고 하자. θ 가 $\frac{\pi}{2}$ 에서 π 까지 변할 때, 선분 PQ 가 지나간 영역을 구체적인 그림으로 나타내고 그 넓이를 구하시오.

☑ 논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

📖 연습 B : 2011학년도 한양대 모의논술 변형

※ 다음 글을 읽고 지시에 따라 논술하시오.

[가] $p(n)(n=1, 2, 3, \dots)$ 는 다음과 같은 명제를 나타낸다.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ 이 모두 양의 실수일 때,

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n \geq x_1 x_2 \cdots x_n$$

이때, 모든 양의 수 x_1 에 대해 $x_1 \geq x_1$ 이므로 $p(1)$ 이 성립한다.

또 $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0$ 이므로 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 \geq x_1x_2$ ($x_1, x_2 > 0$)이다.

따라서 $p(2)$ 도 성립한다.

[나] 양의 정수 m 에 대해서, $p(m)$ 이 성립하면 $p(2m)$ 이 성립함을 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x_1 + \dots + x_m + x_{m+1} + \dots + x_{2m}}{2m} \right)^{2m} \\ &= \left[\frac{\left\{ \frac{(x_1 + \dots + x_m) + (x_{m+1} + \dots + x_{2m})}{2} \right\}^2}{m^2} \right]^m \\ &\geq \left[\frac{(x_1 + \dots + x_m) \cdot (x_{m+1} + \dots + x_{2m})}{m \cdot m} \right]^m \\ &= \left[\frac{(x_1 + \dots + x_m)}{m} \right]^m \cdot \left[\frac{(x_{m+1} + \dots + x_{2m})}{m} \right]^m \\ &\geq (x_1 \cdots x_m) \cdot (x_{m+1} \cdots x_{2m}) = x_1 \cdots x_{2m} \end{aligned}$$

[논제] 양의 정수 m 에 대하여, $p(m+1)$ 이 성립함을 가정하여 $p(m)$ 이 성립함을 보이시오.

부 록

답안작성을 위한 참고답안

제 1 부 : 수리논술을 위한 이해



제1강 수리논술의 이해

연습 A

* 도움말

수열을 표현하는 수식으로 일반항과 점화식을 소개하고 있다. 이들 두 표현식들을 제시문의 내용을 근거로 비교 서술하는 문제다. 이 문제를 통해 제시문의 내용 습득 정도를 평가하고자 하였다.

고교 교과 과정에서 다루고 있는 수열에 관한 내용을 제시문으로 다루었는데, 수열은 나열되는 수들의 집합이라는 점과 이들 수들 간의 관계를 수식으로 표현될 수 있다는 점을 제시문에서는 기술하고 있다. 특히 수열을 하나의 수식으로 전개할 수 있다면, 수열에 관한 여러 가지 연구를 간편히 할 수 있다는 사실을 인지하여야 한다. 수열을 표현하는 방법으로 일반항과 점화식 두 가지를 제시문에서 기술하고 있고 이 두 가지 방법에 대한 간략한 설명을 문제에서 요구하고 있다. 이는 그 특성을 비교함으로써 두 표현법의 유용성을 더 선명하게 기술할 수 있다.

* 참고답안

제시문의 수열 a_n 을 일반항 $a_n = 2n - 1$ 또는 점화식 $a_n = a_{n-1} + 2$, $a_1 = 1$ 으로 표현할 수 있듯이 수열을 일반항과 점화식의 두 가지 형태로 표현할 수 있다. 수열의 일반항은 수열의 n 번째 항의 값을 n 의 함수식으로 정의하여 n 에 차례로 숫자를 대입하여 항들을 구할 수 있어 수열의 합을 구하는데 유용하다. 한편, 점화식은 이웃항들 사이의 관계를 나타내며 항들 사이의 관계를 설명하는 데 유용하지만, 구체적인 항을 알려면 항들 사이의 관계를 이용하여 일일이 계산해야하는 번거로움이 있다.

연습 B 답안작성을 위한 도움말

1. 집합으로 나타내는 것에는 조건제시법과 원소나열법이 있다. 여기서는 흡인력이 같은 고객의 위치를 나타내는 원소를 일일이 나열할 수 없기 때문에 조건제시법이 적합하다.

상점A(1,2)의 흡인력은 $\frac{3}{(x-1)^2 + (y-2)^2}$, 상점B(2,1)의 흡인력은 $\frac{2}{(x-2)^2 + (y-1)^2}$ 이므로 흡

인력이 같기 위해서는 $\frac{3}{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \frac{2}{(x-2)^2 + (y-1)^2}$ 이므로 이것을 간단히 하여 조건

제시법으로 나타내면 $\{(x,y) \mid x^2 - 8x + y^2 + 2y + 5 = 0\}$ 이다.

☑ 부 록 (답안작성을 위한 참고답안)

2. 분모가 양수이므로 부등식을 풀 때, 분모의 최소공배수만 곱하여 식을 간단히 한다. 고객 $P(x, y)$ 에 대한 상점 C의 흡인력은 $\frac{1}{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ 이고 고객 $P(x, y)$ 에 대한 마트 $\overline{DE}$ 의 흡인력은 $\frac{2}{y^2}$ 이다. 마트 $\overline{DE}$ 의 흡인력이 더 크므로 $\frac{1}{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \frac{2}{y^2}$ 이고, 이것을 간단히 하여 마트의 흡인력이 상점의 흡인력보다 크기 위한 조건을 집합으로 나타내면

$$\{(x, y) \mid 2x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 > 0\}$$

이다.

제 2 강 제시문과 논제의 이해

연습 A

* 참고답안

$10^{-\frac{t}{10}} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{t}{10}}$ 에서 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{t}{10}} \rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2000}{1 + 4 \times 10^{-\frac{t}{10}}} = 2000$$

이므로 한계개체수의 50%는 1000이다. 이제 $\frac{2000}{1 + 4 \times 10^{-\frac{t}{10}}} = 1000$ 이 될 때의 시간 t 를 구해보자.

주어진 식 $\frac{2000}{1 + 4 \times 10^{-\frac{t}{10}}} = 1000$ 을 간단히 하여 $\frac{2}{1 + 4 \times 10^{-0.1t}} = 1$ 에서 t 값을 구하면

$$2 = 1 + 4 \times 10^{-0.1t} \text{에서}$$

$$t = 10 \log_{10} 4 = 20 \log_{10} 2 = 20 \times 0.3 = 6(\text{일})$$

임을 알 수 있다. 따라서 저수지물 1l 속에 분포하는 미생물의 개체수가 한계개체수의 50%에 이르는 것은 6일 후이다.



연습 B 답안작성을 위한 도움말

손실이 α dB 인 매질이 두 개, 세 개, ... 연결되어 있다면, 로그의 성질에 의하여 각각의 경우 손실은 $2\alpha, 3\alpha, \dots$ 가 된다. 빛의 손실이 2%이므로 매질을 통과한 후의 빛의 세기는 98%이다. 주어진 식에 의해 dB로 표현한 손실을 x 라 하면 다음 식을 얻게 된다.

$$10 \log_{10} \frac{98}{100} = -x$$

주어진 그래프는 지수함수의 그래프 꼴이므로 이를 이용하여 위 식을 풀기 위해서 지수방정식 꼴로 바꾸면 $0.98 = 10^{-\frac{x}{10}}$. 주어진 그래프에 의하면 $10^{-0.01} = 0.98$ 이므로 $x = 0.1$ 이다. 따라서 빛의 손실은 1 m 당 0.1 dB 임을 알 수 있다.

또한 손실이 α dB 인 매질이 두 개 연결되어 있다면, 첫 매질을 통과한 후 신호 세기는

$$\frac{P_{OUT}}{P_{IN}} = 10^{-\frac{\alpha}{10}} \quad P_{OUT} = 10^{-\frac{\alpha}{10}} \times P_{IN}$$

이며, 첫 매질 후 P_{OUT} 은 다음 매질의 P_{IN} 이 되므로 두 매질을 통과한 후 신호의 세기는

$$P_{OUT} = 10^{-\frac{\alpha}{10}} \times 10^{-\frac{\alpha}{10}} \times P_{IN} = 10^{-\frac{2\alpha}{10}} \times P_{IN}$$

이다. 결국, dB 단위로 계산하는 경우 전체 손실은 각 매질 손실의 합으로 표현된다. 그러므로 100m 를 지난 후 dB 손실은 다음과 같다.

$$-10 \times \log \left(\frac{P_{OUT}}{P_{IN}} \right) = 100\alpha \quad (\text{위의 풀이에서 } \alpha = 0.1 \text{ dB})$$

이상의 결과에 의해 특정매질 100 m 를 지난 후 빛의 손실은 10 dB 임을 추론할 수 있다.

제3강 수리논술 답안작성

연습 A

* 참고답안

(1) $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ 에 $y = 0$ 을 대입하면 $-f(a) = f'(a)(x - a)$

따라서 x 절편 $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ 이다.

(2) 점 $(x_1, f(x_1))$ 에서의 접선의 방정식 L_1 은

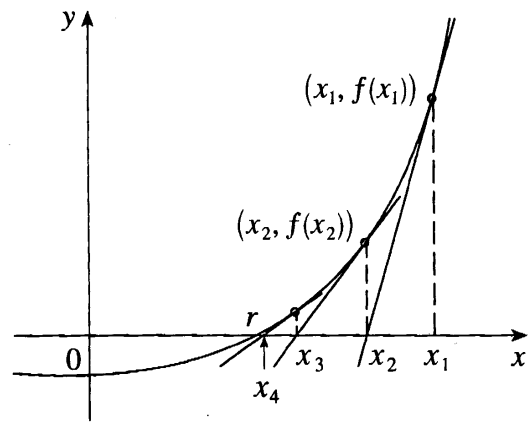
$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \text{ 이다.}$$

L_1 의 x 절편을 x_2 라 하면 $(x_2, 0)$ 이므로,

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

이다.



(3) 점 $(x_2, f(x_2))$ 에서의 접선의 방정식 L_2 는

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$

이다. L_2 의 x 절편을 x_3 라 하면 $(x_3, 0)$ 이므로

$$0 - f(x_2) = f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

이다.

이 과정을 반복하면 다음을 얻는다.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

(참고)

$$f'(x_n) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} \text{ 이므로}$$

$$f'(x_n)x_n - f'(x_n)x_{n+1} = f(x_n)$$

$$f'(x_n)x_n - f(x_n) = f'(x_n)x_{n+1}$$

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}$$



연습 B 답안작성을 위한 도움말

주어진 자료로부터 입체의 부피를 가급적 정확하게 측정하려면 주어진 두 개의 표를 종합해서 사용해야 한다. 특히 각 구간의 평균 단면적을 계산하여 사용하면 더욱 정확한 값을 얻을 수 있다. 이를 표로 정리하면 다음과 같다.

구간mm	0~7	7~10	10~14	14~20	20~21	21~28	28~30	30~35	35~40	40~42	42~49	49~50
구간의 길이	7	3	4	6	1	7	2	5	5	2	7	1
평균단면적	1	2	5	7	6	6	4.5	3.5	3	2	1	0

불순물의 부피는 (단면적 × 구간의 길이) 이므로 부피를 V라 하면

$$\begin{aligned} V &= (7 \times 1) + (3 \times 2) + (4 \times 5) + (6 \times 7) + (1 \times 6) + (7 \times 6) + (2 \times 4.5) + (5 \times 3.5) + (5 \times 3) \\ &\quad + (2 \times 2) + (7 \times 1) + (0 \times 0) \\ &= 175.5 \text{mm}^2 \end{aligned}$$

따라서 불순물의 부피를 175.5mm²로 추정할 수 있다.

이 방법으로 부피를 추론하는 것은 각 간격의 길이의 차가 있기 때문에 다소 부정확할 수 있다. 예를 들어 구간 20~21 사이에 구간차가 1이지만 0~7 구간 사이에는 구간차가 7이나 되기 때문에 이 구간의 단면적은 20~21의 평균단면적 계산 값보다 정확하지 못하다. 아무래도 0~7 사이의 단면적이 급변할 확률이 20~21인 곳보다 크기 때문이다.

곧 어떤 구간에서 단면적이 많이 변해 평균단면적이 대푯값으로서의 의미를 갖지 못하는 경우에는 위에서 구한 부피와 실제 부피 사이에는 많은 오차가 있을 수 있다

제 4 강 직 접 증 명

연습

* 참고답안

(1) 첫째, $k=1$ 일 때, 선분 AB 에 대한 수직이등분선이다.

둘째, $k \neq 1$ 일 때, 선분 AB 를 지나는 직선을 x 축으로 하고, 선분 AB 의 수직이등분선을 y 축으로 잡아 $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $M(x, y)$ 라고 하자.

$$\overline{AM} : \overline{BM} = t : 1 \text{ 에서, } \overline{AM}^2 = t^2 \overline{BM}^2,$$

$$(x+a)^2 + y^2 = t^2 \{(x-a)^2 + y^2\} \text{ 을 정리하면,}$$

$$\left(x + \frac{1+t^2}{1-t^2}a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2at}{1-t^2}\right)^2 \text{ 이 된다.}$$

이 방정식은 중심이 $\left(-\frac{1+t^2}{1-t^2}a, 0\right)$ 이고 반지름이 $\frac{2at}{|1-t^2|}$ 인 원이다.

또한, 선분 AB 를 $t:1$ 로 내분하는 점 $\left(\frac{t-1}{t+1}a, 0\right)$ 과 외분하는 점 $\left(\frac{t+1}{t-1}a, 0\right)$ 을 지름의 양끝으로 하는 아폴로니우스의 원이다.

(2) 도형 S 는 두 점 A, B 에 이르는 거리의 비가 $m:n$ 인 점의 GLP이므로 아폴로니우스의 원이다. 직선 AB 가 원 S 와 두 점 E, F 에서 교차하며, 점 E 는 선분 AB 에 속한다고 하자. 삼각형 APB 에서 $\overline{AE} : \overline{EB} = \overline{AP} : \overline{PB}$ 이므로 $\angle APE = \angle EPB$ 이다. 또 접선 AP 는 원 S 에 접하므로 $\angle APE = \angle EFP$ 이다. 따라서 $\angle EPB = \angle BFP$ 이다. 또, $\angle EPF = 90^\circ$ 이므로, $\angle BPF + \angle BFP = 90^\circ$. 따라서 $\angle ABP = 90^\circ$ 이다.

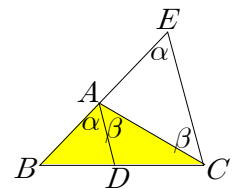
한편, $\triangle ABP \equiv \triangle ABQ$ 이므로, 직선 AB 는 선분 PQ 를 수직으로 이등분한다.

* 도움말

삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 AD 일 때, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 이다.

(증명) $\angle BAD = \angle DAC$ 이고, $\angle BAD = \alpha$, $\angle DAC = \beta$ 라고 하자. 선분 AB 를 연장하고, 직선 AD 와 평행하게 직선 CE 를 그으면 α 끼리는 동위각으로 같고, β 끼리는 엇각으로 같다. 그런데 $\alpha = \beta$ 이므로 $\angle ACE = \angle AEC$ 이다. 즉, $\overline{AC} = \overline{AE}$ 이다. 그런데 $\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AB} : \overline{AC}$ 이므로, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 이다.

* 역도 성립한다.



제 2 부 : 수리논술을 위한 논증



제 5 강 귀류법

연습

* 답안작성을 위한 도움말

[논제 1] 제시문의 내용을 바탕으로 자연수에서 소수가 하는 역할이 화학에 원자의 역할과 같음을 논리적으로 제시한다.

[논제 2] 귀류법을 이용하여 소수의 개수가 무한하다는 유클리드의 증명을 부연 설명한다.

* 참고답안

[논제1] 소수는 어떤 수로도 나누어지지 않는다. 1을 제외한 모든 자연수는 소수의 곱으로 나타낼 수 있고, 서로 다른 소수의 곱은 서로 다른 자연수를 만들어낸다. 즉, 소수는 자연수를 이루는 기본 단위라 할 수 있다. 이와 비슷하게 화학에서의 원자도 화학반응을 통해 더 이상 나누어지지 않는다. 모든 분자는 원자들의 조합으로 나타낼 수 있고, 다른 원자들의 조합은 다른 분자를 나타낸다. 즉, 원자는 분자를 이루는 기본 단위라 할 수 있다. 따라서 소수와 원자는 자연수와 화학에서 같은 역할을 한다고 할 수 있다.

[논제2] 우선 소수의 개수가 유한하다고 가정하고 유한개의 모든 소수를 크기순으로 $2, 3, 5, 7, \dots, P$ 라 하자. 이 모든 소수들의 곱 $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times P$ 는 소수들로 나누어떨어지므로 합성수이다. 그런데 이 수에 1을 더하여 만든 수 $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times P + 1$ 은 어떤 소수로도 나누어떨어지지 않는다. 왜냐하면 $A+B$ 인 수가 어떤 수 d 로 나누어떨어지기 위해서는 수 A 가 수 d 로 나누어질 경우 수 B 도 수 d 로 나누어떨어져야한다. 그러나 수 $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times P + 1$ 의 경우 $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times P$ 는 임의의 소수로 나누어떨어지지만 1은 어떤 소수로도 나누어떨어지지 않으므로 $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times P + 1$ 은 어떤 소수로도 나누어떨어지지 않는다. 즉, 수 $2 \times 3 \times 5 \times \dots \times P + 1$ 은 소수 $2, 3, 5, 7, \dots, P$ 와는 다른 새로운 소수임을 알 수 있다. 이것은 P 보다 큰 소수가 존재한다는 것이고, 소수의 개수가 유한하다고 가정한 것에 모순이다. 따라서 소수의 개수는 무한하다.

제6강 수학적 귀납법

연습 A

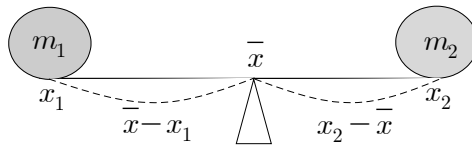
* 도움말

$n=2$ 인 경우 지렛대의 원리에 의하여 $\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$ 임을 구할 수 있다.

이를 토대로 n 개일 때의 무게중심의 좌표는 $\bar{x} = \frac{m_1x_1 + \dots + m_nx_n}{m_1 + \dots + m_n}$ 으로 추정할 수 있다. 그러나 이것은 추정일 뿐, 완벽한 증명이라고 할 수는 없고 이것을 수학적 귀납법을 사용하여 검증을 하여야 한다.

* 참고답안

(1) 무게중심의 좌표 $\bar{x}$ 는 지렛대의 원리에 의해



$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x}) \text{ 이므로 } \bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \text{ 이다.}$$

(2) (1)의 결과로부터 n 개일 때의 질량중심의 좌표 $\bar{x}$ 는 $\bar{x} = \frac{m_1x_1 + \dots + m_nx_n}{m_1 + \dots + m_n}$ 로 추정할 수 있다.

(3) 위 식을 수학적 귀납법을 사용하여 증명하자.

$n=2$ 인 경우는 (1)에서 참이 됨을 보였다.

다음으로 임의의 n 에 대하여 생각하자.

처음 $n-1$ 개의 물체의 질량중심을 $\bar{x}'$ 라 하면 다음이 성립함을 가정하자.

$$\bar{x}' = \frac{m_1x_1 + \dots + m_{n-1}x_{n-1}}{m_1 + \dots + m_{n-1}}$$



한편 전체 n 개의 질량 중심 $\bar{x}$ 는 $\bar{x}'$ 과 x_n 의 위치에 질량이 각각 $m_1 + \dots + m_{n-1}$, m_n 인 두 물체가 있을 때의 질량 중심과 같다. 그러므로 지렛대의 원리에 의해

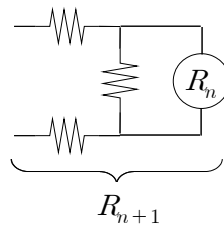
$$\bar{x} = \frac{(m_1 + \dots + m_{n-1})\bar{x}' + m_n x_n}{(m_1 + \dots + m_{n-1}) + m_n} = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n} \text{ 을 얻게 된다.}$$

곧 (i), (ii)에서 n 개일 때의 질량중심의 좌표 $\bar{x}$ 는 $\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}$ 이다.

연습 B 답안작성을 위한 도움말

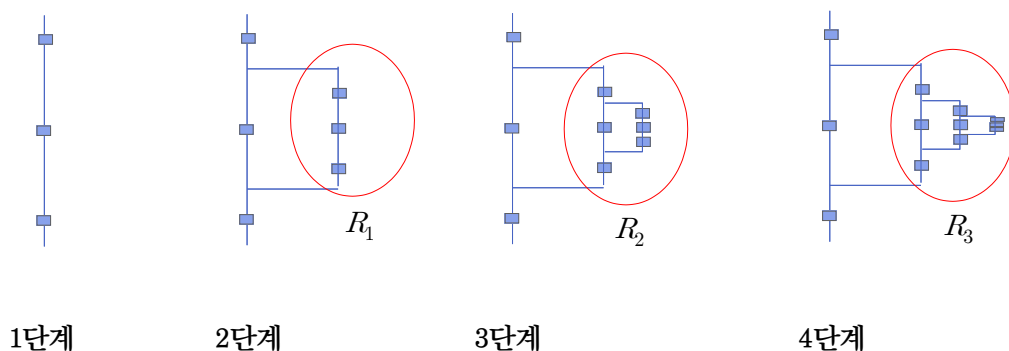
* 도움말

R_n 과 R_{n+1} 의 관계, 곧 점화식은 다음을 이용하여 추론할 수 있다.



그러나 점화식에서 R_n 을 유도하기는 쉽지 않으므로 R_n 이 감소함을 $R_n > R_{n+1}$ 임을 이용하여 보일 수 있다. 이 때 수학적 귀납법을 사용하기 위하여 먼저 $R_1 > R_2$ 임을 보이고, $R_k < R_{k+1}$ 일 때 $R_{k+1} < R_{k+2}$ 이 성립함을 보이면 된다.

[그림 3]에서 3개씩 덧붙이는 부분을 다시 그리면 아래 그림과 같다. 즉, 1단계는 모두 직렬 연결되어 있지만 1단계의 가운데 저항과 새로 덧붙이는 3개의 저항은 병렬연결이다.



1단계의 합성저항을 R_1 , 2단계를 R_2 , 차례로 n 단계의 합성저항을 R_n 이라 하자. 위 그림처럼 전단계의 합성저항을 이용하면 다음 단계의 합성저항을 구할 수 있다.

☑ 부 록 (답안작성을 위한 참고답안)

$$R_1 \Rightarrow 2+1 \Rightarrow 3$$

$$R_2 \Rightarrow 2 + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{3}} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$R_3 \Rightarrow 2 + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{4}{11}} = 2 + \frac{11}{15} = \frac{41}{15}$$

이와 같은 방법으로 생각하면 각 단계마다 2는 직렬인 채로 있고 1에 3개씩 병렬로 저항이 덧붙여지는 것이므로 $n+1$ 단계 저항은

$$R_{n+1} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{R_n}}$$

로 나타낼 수 있다.

위에서 구한 합성저항 값을 살펴보면 단계가 높아질수록 합성저항이 감소함을 알 수 있다. 이제 일반적으로 $R_n > R_{n+1}$ 임을 수학적 귀납법으로 증명해보자.

$$n=1 \text{ 일 때 } R_1 = 3 > R_2 = \frac{11}{4}$$

$n=k$ 일 때 성립한다고 가정하면 $R_k > R_{k+1}$ 이다.

$$\begin{aligned} R_{k+1} - R_{k+2} &= \left(2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{R_k}} \right) - \left(2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{R_{k+1}}} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{R_k+1}{R_k}} - \frac{1}{\frac{R_{k+1}+1}{R_{k+1}}} \\ &= \frac{R_k}{R_k+1} - \frac{R_{k+1}}{R_{k+1}+1} \\ &= 1 - \frac{1}{R_k+1} - \left(1 - \frac{1}{R_{k+1}+1} \right) \\ &= \frac{1}{R_{k+1}+1} - \frac{1}{R_k+1} > 0 \end{aligned}$$

$$\left(\because R_k > R_{k+1} \text{ 이므로 } R_k+1 > R_{k+1}+1, \frac{1}{R_k+1} < \frac{1}{R_{k+1}+1} \right)$$

따라서 위 식은 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $R_n > R_{n+1}$ 이 성립함을 알 수 있다.

제 3 부 : 수리논술을 위한 수학적 사고



제7강 수학적 사고1 - 확률

연습 A

* 답안작성을 위한 도움말

(가)에서 염주가 만들어 지는 표본공간의 원소를 구해본다.

(나)에서 주어진 예에 해당하는 확률을 구하고 그것을 제시문의 것과 비교해 본다.

* 참고답안

염주가 만들어지는 경우를 아래와 같이 여섯 가지가 가능하다.

(○○●●), (○●○●), (○●●○), (●○●○), (●○○●), (●●○○)

이 구슬들을 짝어 염주로 만들면 모두 a형 또는 b형의 염주가 된다. 따라서 염주가 만들어 지는 표본

공간의 원소는 6가지이다. 그 중 a형 염주 (●●○○ 모양)인 것이 4가지이고, b형 염주 (○○●● 모양)인

것이 2가지이다. 따라서 a형 염주가 만들어지는 사건 A가 발생할 확률 $P(A) = \frac{2}{3}$ 이다. 제시문 (가)

에서 염주가 만들어지는 근원사건을 두 가지로 보고 a형 염주가 만들어지는 사건 A의 확률을 $P(A) = \frac{1}{2}$ 로 풀이한 것은 잘못된 것이다. 제시문 (나)에서 알약 1만정 중에서 1정을 선택할 때 진품

을 선택하는 사건을 A라 하고 1정의 알약을 모조품으로 판정하는 사건을 B라 하자. 임의로 알약 1정을 검사한 결과 모조품이라는 판정이 나왔을 때, 그 알약이 모조품일 확률은 $P(A^c|B)$ 이다.

따라서 $P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{0.00009}{0.09999 + 0.00009} \approx 0.0008992$ 이므로 구하는 확률은

약 0.08992%이다.

연습 B 답안작성을 위한 도움말

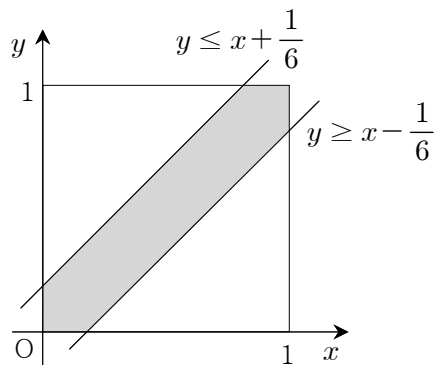
두 사람이 만나는 경우를 식으로 표현한 후 좌표평면 위에 나타내어 기하학적 확률을 적용한다. 먼저 정오와 오후 1시 사이에 진우와 서희가 신촌역에 도착하는 시각을 각각 x, y 라 하자. 그러면 x 축, y 축을 진우, 서희가 각각 도착 가능한 시간 축으로 하는 표본공간을 가로, 세로의 길이가 1인 정사각형으로 구성할 수 있다. 두 사람이 만날 경우는 도착 시각의 차이가 10분 즉 $\frac{1}{6}$ 시간 이하일 때이므로

☑ 부 록 (답안작성을 위한 참고답안)

다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$|x-y| \leq \frac{1}{6} \quad (\text{단, } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$$

즉, $-\frac{1}{6} \leq x-y \leq \frac{1}{6}$ 이다. 이것을 좌표평면 위에 나타내면 두 사람이 만날 경우는 아래 그림에서 색칠한 부분이 된다.



따라서 두 사람이 만날 확률은

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$$

이다.



제8강 수학적 사고 2- 구분구적법과 정적분

연습 A

* 답안작성을 위한 도움말

- (1) 두 점 $(0, a), (L, b)$ 를 지나는 직선의 방정식을 이용하여 y_k 를 x_k 에 관한 식으로 나타낸다. 원기둥 조각의 저항 ΔR_k 를 구한다.
- (2) 구분구적법을 이용하여 전체 저항을 구한다.

* 참고답안

- (1) 먼저 두 점 $(0, a), (L, b)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$y = \frac{b-a}{L}x + a$$

이다. 따라서 x_k 에서 도선의 반지름 y_k 는 $y_k = \frac{b-a}{L}x_k + a$ 이다.

길이가 Δx 인 원기둥의 저항 ΔR_k 은 제시문 [라]에 주어진 내용에 의해 다음으로 주어진다.

$$\Delta R_k = \rho \frac{\Delta x}{\pi y_k^2} = \rho \frac{\Delta x}{\pi \left(\frac{b-a}{L}x_k + a \right)^2}$$

- (2) 전체 길이가 L 인 도선의 저항 R 은 제시문 [가]와 [다]에 의해서 다음과 같이 적분을 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta R_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\rho}{\pi} \left(\frac{b-a}{L}x_k + a \right)^{-2} \Delta x \\ &= \frac{\rho}{\pi} \int_0^L \left(\frac{b-a}{L}x + a \right)^{-2} dx = \frac{\rho}{\pi} \left[-\frac{L}{b-a} \left(\frac{b-a}{L}x + a \right)^{-1} \right]_0^L \\ &= -\frac{\rho L}{\pi(b-a)} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\rho L}{\pi ab} \end{aligned}$$

연습 B 답안작성을 위한 도움말

[문제1] 먼저 (소득이 a, b 사이에 있는 사람 수)를 정적분의 정의에 따라 나타낸다.

이 식에서 (소득이 x_k 인 사람들의 소득의 총합)을 추론하고, 정적분의 정의에 의해 (소득이 a 에서 b 사이에 있는 사람들의 소득의 합)을 구한다.

☑ 부 록 (답안작성을 위한 참고답안)

[문제2] 파레토 법칙이 성립하는지 알기 위해서 먼저 상위 20%의 인구수를 구한다.

다음으로 상위 20%의 소득의 총합을 구하기 위해 상위 20%가 갖는 최저 소득을 구한다. 마지막으로 상위 20%의 소득의 총합과 전체 인구의 총 소득의 80%를 구하여 대소비교를 한다.

[문제1] 제시문[나]에서 제시된 (소득이 a, b 사이에 있는 사람 수) $= \int_a^b x^{-p} dx$ 를

정적분의 정의에 따라 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k^{-p} \Delta x$ (단 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k\Delta x$)로 나타낼 수 있다. 우선 (소득이 x_k 인 사람들의 소득의 총합)은 (소득 x_k) $\times$ (소득이 x_k 인 사람 수)이므로 x_k^{1-p} 로 추론할 수 있다. 따라서 정적분의 정의에 따라 (소득이 a, b 사이에 있는 사람들의 소득의 합)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k^{1-p} \Delta x \quad (\text{단 } \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x) = \int_a^b x^{1-p} dx \text{ 이다.}$$

[문제2] (상위 20% 인구수)는 '(총인구수) $\times \frac{1}{5}$ ', 이므로 $\frac{1}{5} \int_1^{100} x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2} \left[-2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \right]_1^{100} =$

$\frac{1}{5} \cdot \frac{9}{5} = \frac{9}{25}$ 이다. 상위 20%가 갖는 소득이 'b부터 100까지' 라고 하면 (상위 20% 인구

수) $= \int_b^{100} x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{9}{25} \left[-2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \right]_b^{100} = \frac{9}{25} - \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{9}{25}$ 이므로 $\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{7}{25}$ 이다.

상위 20%가 갖는 소득은 'b부터 100까지' 이므로 (상위 20%의 소득의 총합)은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\int_b^{100} x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \right]_b^{100} = 20 - 2\sqrt{b} = 20 - \frac{50}{7} = \frac{90}{7} \dots \textcircled{1}$$

반면 (총소득의 80%)는 다음과 같다.

$$\frac{4}{5} \int_1^{100} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{5} \left[2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \right]_1^{100} = 18 \times \frac{4}{5} = \frac{72}{5} \dots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{1} < \textcircled{2}$ 이므로 파레토 법칙은 성립하지 않는다.



제9강 수학적 사고 3 -행등원과 역원, 행렬

연습 A

* 참고답안

[문제 1] (1) 수신자는 문자와 수와의 대응관계 표와 암호키인 행렬 B 를 알고 있어야 한다. 또한, 수신자는 다음과 같은 과정을 통하여 암호문을 해독할 수 있다. 수신자는 받은 암호문 “17, -14, 15, 24, 13, -1, 15, 23”가 행렬 BA 임을 알고 있다. 즉,

$$BA = \begin{pmatrix} 17 & -14 & 15 & 24 \\ 13 & -1 & 15 & 23 \end{pmatrix}$$

이다.

B 가 정칙행렬이므로 역행렬 $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 가 존재한다. 이 때, 행렬 B^{-1} 가 복호키이다.

$$B^{-1}BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & -14 & 15 & 24 \\ 13 & -1 & 15 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 & 22 \\ 5 & 25 & 15 & 21 \end{pmatrix}$$

행렬의 성분을 “9, 12, 15, 22, 5, 25, 15, 21”로 나열한 후 표를 이용하여 대응되는 알파벳을 찾아 원하는 문장 “I love you”을 얻는다.

[문제 2] 행렬 C 의 역행렬 C^{-1} 가 존재하면 주어진 방법과 같은 방법으로 암호화하고 해독할 수 있으므로 행렬 C 의 역행렬이 존재하기 위한 필요충분조건인 “ $ad \neq bc$ ”가 a, b, c, d 사이의 관계가 된다.

[문제 3] 3×3 행렬을 사용할 수 있다. 예를 들면,
 <송신자> 문장 “I love you”에 대응되는 자연수의 개수는 8개이므로 맨 처음에 의미 없는 수(27번~30번)를 삽입하여, “28, 9, 12, 15, 22, 5, 25, 15, 21”을 구한다. 다음은 이들 수들의 배열을 3개씩 끊어서 행렬,

$$E = \begin{pmatrix} 28 & 9 & 12 \\ 15 & 22 & 5 \\ 25 & 15 & 21 \end{pmatrix} \text{를 만든다.}$$

이를 암호화하기 위하여 역행렬이 존재하는 3×3 행렬 F 를 E 의 왼쪽에 곱한 행렬 FE 의 1행, 2행, 3행의 성분들을 순서대로 나열한 암호문을 송신한다. (이때, 행렬 F 는 역행렬이 존재하기만 하면 된다. 따라서 F 를 선택하는 방법은 무수히 많이 존재한다)

☑ 부 록 (답안작성을 위한 참고답안)

〈수신자〉 암호 수신자는 받은 수열을 3개씩 끊어서 3×3 행렬 G 를 만들고 왼쪽에 F 의 역행렬을 곱한 후 얻은 3×3 행렬 $F^{-1}G$ 의 1행, 2행, 3행의 성분들을 순서대로 나열하고 표를 이용하여 대응되는 알파벳을 찾아 나열하여 최종적으로 암호문을 해독할 수 있다.

📖 연습 B 답안작성을 위한 도움말

[문제 1] i) $l(P_m \oplus P_n) = l(P_m) + l(P_n)$ 이고, $l(P_n \oplus P_m) = l(P_n) + l(P_m)$ 이다.

따라서 $l(P_m \oplus P_n) = l(P_n \oplus P_m)$, 즉, $P_m \oplus P_n = P_n \oplus P_m$ 이므로 교환법칙이 성립한다.

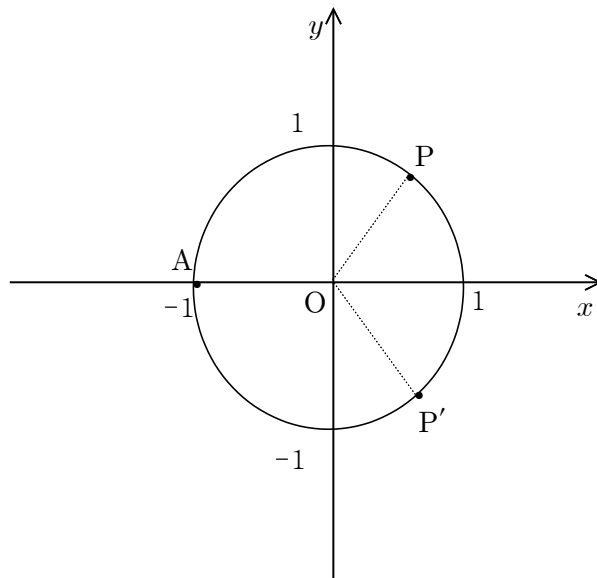
ii) $l\{(P_l \oplus P_m) \oplus P_n\} = l(P_l \oplus P_m) + l(P_n) = l(P_l) + l(P_m) + l(P_n)$ 이고,

$l\{P_l \oplus (P_m \oplus P_n)\} = l(P_l) + l(P_m \oplus P_n) = l(P_l) + l(P_m) + l(P_n)$ 이다.

따라서 $l\{(P_l \oplus P_m) \oplus P_n\} = l\{P_l \oplus (P_m \oplus P_n)\}$ 즉, $(P_l \oplus P_m) \oplus P_n = P_l \oplus (P_m \oplus P_n)$ 이므로 결합법칙이 성립한다.

[문제 2] 연산 $\oplus$ 에 대하여 P 의 항등원과 역원의 정의를 쓰고 만족하는 점을 찾는다. 연산 $\oplus$ 에 대한 항등원을 나타내는 점을 점 E 라고 하면 $P \oplus E = P = E \oplus P$ 를 만족해야 한다. 즉, $l(E) = 0$ 이므로 $E = A$ 이다.

점 P 의 역원을 나타내는 점을 P' 이라고 하면 $P \oplus P' = A = P' \oplus P$ 를 만족해야 한다. 즉, $l(P) = \theta$ 라고 하면 $l(P') = 2\pi - \theta$ 이어야 한다. 즉, 그림을 보면 점 P 의 역원을 나타내는 점은 점 P 를 x 축에 대칭시킨 점임을 알 수 있다.





[문제 3] $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ 을 직접 나열하여 수열의 규칙성을 찾는다. $P_n = A$ 가 되는데 필요한 조건을 찾고 만족하는 n 의 최솟값을 구한다.

$l(P_n) = l(P_{n-1} \oplus P_{n-2})$ 이고 연산 $P_1 \oplus P_2$ 를 점 P_1 부터 원 C 를 따라 시계 방향으로 $l(P_2)$ 만큼 더 이동하여 얻어지는 점으로 정의하였으므로 $l(P_n) = l(P_{n-1}) + l(P_{n-2})$ 이다. 즉,

$$l(P_0) = 0, \quad l(P_1) = \frac{\pi}{3}, \quad l(P_2) = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \quad l(P_3) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

$$l(P_4) = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{3}, \quad l(P_5) = \frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}, \quad l(P_6) = \frac{3\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} \dots$$

$P_n = A$ 이기 위해서는 $l(P_n) = 2m\pi$ (m 은 0또는 자연수)이어야 한다. $l(P_{12}) = \frac{144\pi}{3} = 48\pi$ 즉,

위와 같은 과정을 반복하면 처음으로 $l(P_n) = 2m\pi$ (m 은 0또는 자연수)인 값이 P_{12} 일 때 처음으로 나오므로 $P_n = A$ 인 n 의 최솟값은 12이다.

[문제 4] [문제 3]의 방법을 이용하여 P_1 은 $l(P_1) = \frac{2\pi}{k}$ 인 원 C 위의 점일 때, $P_n = A$ 를 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구한다.

$l(P_n) = l(P_{n-1}) + l(P_{n-2})$ 이므로 수열 $l(P_n)$ 이 피보나치수열임을 알 수 있다.

$$l(P_0) = 0, \quad l(P_1) = \frac{2\pi}{k} \times 1, \quad l(P_2) = 0 + \frac{2\pi}{k} \times 1 = \frac{2\pi}{k} \times 1, \quad l(P_3) = \frac{2\pi}{k} \times 1 + \frac{2\pi}{k} \times 1 = \frac{2\pi}{k} \times 2,$$

$$l(P_4) = \frac{2\pi}{k} \times 3, \quad l(P_5) = \frac{2\pi}{k} \times 5, \quad l(P_6) = \frac{2\pi}{k} \times 8 \dots \text{이므로}$$

$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 인 피보나치수열을 a_n 이라고 하였을 때, $l(P_n) = \frac{2\pi}{k} a_n$ 이다.

$P_n = A$ 이기 위해서는 $l(P_n) = 2m\pi$ (m 은 0또는 자연수)이어야 하므로 a_n 이 처음으로 k 의 배수일 때의 n 값이 $P_n = A$ 를 만족하는 자연수 n 의 최솟값이다.

제10강 수학적 사고 4-나선

연습 A

※ 답안작성을 위한 도움말

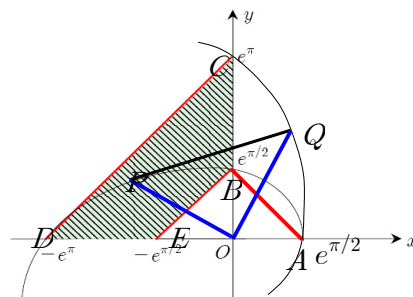
제시문에 주어진 수학적 내용을 확인하고, 로그 나선과 관련된 기하학적 성질을 추론하면 수학 하의 내용에 대한 기본적인 이해만으로 충분히 문제를 해결할 수 있으나, 오히려 어렵게 적분과 벡터를 이용하면 많은 계산이 필요하기 때문에 시간을 소모할 수 있다. 이 논제를 해결하는 데 있어서는 수학적 논리력, 추리력, 상상력 등이 중요하다. 즉, 제시문의 내용에서 $\angle QPO$ 는 항상 $\frac{\pi}{4}$ 이고, $\angle POQ$ 는 직각이므로 $\angle OQP$ 도 $\frac{\pi}{4}$ 임을 알 수 있다. 이 사실을 바탕으로 그림을 그려보면 복잡한 계산을 하지 않고도 쉽게 논제를 해결할 수 있다.

※ 참고답안

좌표평면 위를 움직이는 점의 좌표 (x, y) 가 $x = e^\theta \cos \theta$, $y = e^\theta \sin \theta$ (단, θ 는 매개변수)로 주어지는 로그 나선은 각 점에서의 접선과 그 점에서 원점까지의 선분이 이루는 각도가 항상 $\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\angle QPO$ 는 항상 $\frac{\pi}{4}$ 이고, $\angle POQ$ 는 직각이므로 $\angle OQP$ 도 $\frac{\pi}{4}$ 임을 알 수 있다. 좌표평면 위에서 $A(e^{\pi/2}, 0)$, $B(0, e^{\pi/2})$, $C(0, e^\pi)$, $D(-e^\pi, 0)$, $E(-e^{\pi/2}, 0)$ 이라 놓으면 θ 가 $\frac{\pi}{2}$ 에서 π 까지 변할 때, 선분 PQ 가 지나간 영역은 호 ABD 와 호 AC 와 선분 CD 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 그런데 선분 AB 과 선분 BC 과 호 CA 으로 둘러싸인 부분의 넓이는 선분 BE 과 선분 ED 과 호 DB 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 따라서 점 PQ 가 지나간 영역의 넓이는 빗금 친 부분의 넓이와 같으므로

$$\frac{1}{2}(e^\pi \times e^\pi - e^{\pi/2} \times e^{\pi/2}) = \frac{1}{2}(e^{2\pi} - e^\pi)$$

이다.





📌 연습 B 답안작성을 위한 도움말

$p(m+1)$ 이 성립하므로,

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_m + x_{m+1}}{m+1} \right)^{m+1} \geq x_1 \cdots x_m x_{m+1}.$$

이는 모든 양의 정수 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m, x_{m+1}$ 에 대해서 성립하므로, 특히

$x_{m+1} = \frac{x_1 + \cdots + x_m}{m}$ 에 대해서도 성립한다.

이 식에 $x_{m+1} = \frac{x_1 + \cdots + x_m}{m}$ 을 대입하면,

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_m + \frac{x_1 + \cdots + x_m}{m}}{m+1} \right)^{m+1} \geq x_1 \cdots x_m \times \frac{x_1 + \cdots + x_m}{m}.$$

이를 정리하면

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_m}{m} \right)^m \geq x_1 \cdots x_m.$$

이는 모든 양의 정수 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$ 에 대해서 성립하므로, $p(m)$ 이 성립한다.

논술지도의 원리와 실제 III (자연계-수리)

2011년 3월 일 인쇄

2011년 3월 일 발행

발 행 : 한국대학교육협의회 입학전형지원실

121-270 서울시 서초구 헌릉로 25 한국연구재단 서울청사 4층

전 화 : 02)6393-5266

인 쇄 처 : (주)이모션덕유

전 화 : 02)2263-6414

RM 2011-2-413

* 이 책 내용의 일부 혹은 전체를 허락없이 변경하거나 복제할 수 없습니다.(비매품)

